Über einige Rechenverfahren der axiomatischen Quantenfeldtheorie

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Heinz-Dietrich DOEBNER

aus

Berlin

1962

Über einige Rechenverfahren der axiomatischen Quantenfeldtheorie

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung der Doktorwürde

R. UNIV. BIBLIOTHEK LEIPZIG

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Heinz-Dietrich DOEBNER

aus

Berlin

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Name des Dekans : Prof. Dr. H. LÜERS

Gutachter : Prof. Dr. G. LUDWIG

Prof. Dr. M. PÄSLER

Tag der mündlichen Prüfung : 8. Februar 1962

Tag der Promotion: 25. Juli 1962

Einleitung

Zur Untersuchung der Struktur einer Elementarteilchentheorie , deren Rahmen durch ein physikalisch vernünftiges und mathematisch sinnvolles Axiomensystem gegeben ist , sind Rechenmethoden nötig , die sowohl Aussagen über physikalisch beobachtbare Größen liefern , als auch einen klaren Einblick in den inneren Zusammenhang der Theorie erlauben . Dabei interessiert besonders , wie sich die einzelnen Axiome oder Axiomgruppen im Rahmen der Theorie bemerkbar machen , also welche Eigenschaften der Streumatrix durch ein bestimmtes Axiom impliziert werden und umgekehrt , welche Axiome mindestens nötig sind , um bestimmte Eigenschaften der Streumatrix zu erreichen .

Für die Konstruktion geeigneter Rechenverfahren gehen wir von einem Axiomensystem mit symmetrischer Asymptotenbedingung aus , das unter Betonung darstellungstheoretischer Gesichtspunkte formuliert wird (Teil 1) . Eine abgeschwächte Form der Asymptotenbedingung führt dann zu einer Reihe von Reduktionsverfahren , die klassifiziert und für zwei Möglichkeiten durchgeführt werden . Die Ergebnisse sind in der FOCK-Darstellung für den physikalischen Bereich symmetrisierbar (Teil 2) . Charakteristische Schwierigkeiten treten durch nicht vertauschbare Grenzprozesse und durch Matrixelemente auf , deren Konvergenz in die Ableitung der Reduktionsformeln eingeht , aber aus der Asymptotenbedingung nicht folgt , sondern zusätzlich gefordert oder aus anderen Axiomen bewiesen werden muß . Für Konvergenzuntersuchungen an solchen Matrixelementen werden Integraldarstellungen verwendet (Abschnitt 1.32) . Die bekannten Reduktionsformeln ergeben sich als Spezialfall .

Als direkte Konsequenzen der Reduktion lassen sich Symmetrierelationen zwischen Matrixelementen in physikalischen und unphysikalischen Bereichen ableiten und mit einer Zusatzforderung Theoreme über die Vertauschbarkeit der auftretenden Integrationsreihenfolgen (Abschnitt 3.1 und 3.2) . Mit zeitlicher Translationsinvarianz führen die Verfahren zu Gleichungen

vom LOW-Typ , die unter Verwendung von Lorentzinvarianz und Kausalität über die DYSON-Darstellung in eine inhomogene Form der CHEW-LOW-Gleichungen übergehen (Abschnitt 3.3) . Als Inhomogenität tritt ein Polynom in den Energien der beteiligten Teilchen auf , dessen Koeffizienten durch die Spektralfunktion des Kommutators bestimmt sind . Für das Verschwinden des Polynoms in Modelltheorien gelten mit wechselwirkenden Feldern verträgliche Bedingungen . Als Anwendung der inhomogenen CHEW-LOW-Gleichung wird diskutiert , wann die Inhomogenität wesentliche Beiträge zur Streuamplitude liefert; außerdem wird auf den Zusammenhang verschiedener Kausalitätsforderungen bei der Ableitung von Dispersionsrelationen eingegangen .

Meinem verehrten Lehrer , Herrn Professor Dr. G. Ludwig , danke ich für sein stetig förderndes Interesse und für die Möglichkeit , an seinem Institut zu arbeiten . Herrn Dr. G. Berendt und Herrn P. Rosenthal bin ich für Anregungen und zahlreiche Diskussionen zu Dank verpflichtet .

Inhaltsverzeichnis

1. Axiomatik 1

1.1 Das freie Feld 2

1.2 Das interpolierende Feld 4

1.3 Asymptotenbedingung

1.31 Formulierung 6

1.32 Konvergenzbetrachtungen 11

2. Reduktionsverfahren 18

2.1 Charakterisierung der Verfahren 19

2.2 Verfahren B 22

2.3 Verfahren C 31

2.4 Zusammenfassung 38

3. Spezielle Konsequenzen der Reduktionsverfahren 40

3.1 Integrationsreihenfolgen in Reduktionsformeln 40

3.2 Symmetrierelationen 43

3.3 Gleichungen vom LOW-Typ 46

Literaturverzeichnis 51

Den Kapiteln 1, 2 und 3 sind einführende Inhaltsangaben vorangestellt (Seite 1, 18 und 40). Eine Zusammenfassung der Ergebnisse aus Kapitel 2 findet sich auf Seite 38. Zu den Ergebnissen aus Kapitel 1 und 3 siehe Seite 11 (Abschnitt 1.32), Seite 43-44 (Abschnitt 3.1 und 3.2) und Seite 46, sowie 49-50 (Abschnitt 3.3).

1. Axiomatik

Bei Prozessen zwischen Elementarteilchen sind die vor und nach einer Reaktion anwesenden freien Teilchen , der "einlaufende" und der "auslaufende" Zustand, die unmittelbar experimentell zugänglichen Größen. Über die Vorgänge während der Reaktion , also über den genauen Ablauf der Wechselwirkung , lassen sich keine direkten Informationen gewinnen. Das legt zur theoretischen Beschreibung eine Methode nahe [1], welche die physikalischen Parameter der freien ein- oder auslaufenden Teilchen in einem ersten Teil beschreibt und in einem zweiten Teil durch einen Formalismus verknüpft, der die Wechselwirkung pauschal wiedergibt , aber im Einzelnen (zunächst) keine physikalische Bedeutung etwa in dem Sinn zu haben braucht , daß er nicht triviale Aussagen über die physikalischen Eigenschaften des Systems während der Wechselwirkung liefert.

Akzeptiert man als sinnvolle Beschreibungsweise freier Teilchen eine Quantenfeldtheorie , d. h. die Darstellung einer Algebra von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren in einem Hilbertraum, wird die einfachste Realisierung einer Verknüpfung der ein- und auslaufenden Teilchen bzw. der ihnen zugeordneten Darstellungen der Algebra , eine interpolierende Operatoralgebra sein , deren Darstellungsfunktional für freie Teilchen "asymptotisch" in das Darstellungsfunktional der ein- und auslaufenden Teilchen übergeht. Zur Konkretisierung dieser Asymptotik beachtet man , daß die Elemente der interpolierenden Algebra als Funktionen der Zeit gewählt werden können , die für beliebig große Zeiten in einem festzulegenden Sinn gegen freie Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren konvergieren . Man kann alternativ auch von der Fourieralgebra der interpolierenden Operatoren (interpolierendes Feld) ausgehen , deren Elemente sich als Funktionen über dem vierdimensionalen Ortsraum definieren lassen und sowohl für große zeitliche als auch für große räumliche Abstände zweier Operatoren oder Operatorgruppen ein passendes Konvergenzverhalten fordern . Ansätze zu einer Theorie interpolierender Felder , die nur asymptotisch einen physikalisch konkreten Sinn haben müssen , sind öfters gemacht worden . Der erfolgreichste ist der von LEHMANN, SYMANZIK , ZIMMERMANN [2 , abgekürzt als LSZ], der ein Feld $A(x)$ zur Interpolation im Ortsraum benutzt und durch eine zeitliche Asymptotenbedingung die freien Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren

an die Fourieralgebra der interpolierenden Operatoren anschließt , was es sinnvoll und teilweise notwendig macht , gewisse Invarianz- , Kausalitäts- , Lokalisierungs- und Symmetrieeigenschaften des freien Feldes auf das interpolierende Feld zu übertragen . An die Spitze dieser Rahmentheorie sind zwei Gruppen von Forderungen oder Axiomen zu stellen . Man muß erklären , was das freie Feld als einlaufendes- und auslaufendes Feld bedeutet , was das interpolierende Feld sein soll , und muß zusätzlich die Anschlußbedingung formulieren . Wir werden dies im Folgenden unter Betonung des darstellungstheoretischen Gesichtspunktes skizzieren , ohne wesentlich auf mathematische Schärfe und Vollständigkeit zu achten , die Anschlußbedingung im Einzelnen untersuchen und in einem weiteren Abschnitt Überlegungen zur Ableitbarkeit des zeitlichen Konvergenzverhaltens bestimmter interpolierender Operatorprodukte aus Invarianz- und Kausalitätsforderungen andeuten . Eine exakte und ausführlichere Axiomatik findet sich in [3] .

1 . 1 Das freie Feld

1. Eine zyklische Darstellung einer *Algebra von Operatoren $A_{frei}(x)$ in einem Hilbertraum (zyklisches Element oder Vakuum sei $|0\rangle$) heiße freies Feld , wenn die $A_{frei}(x)$ Funktionen über dem vierdimensionalen Ortsraum mit $(\Box_x - m^2)A_{frei}(x) = K_x A_{frei}(x) = 0$ sind und als Elemente der Algebra die Vertauschungsrelationen $[A_{frei}(x), A_{frei}(y)] = i\,\Delta(x-y)$ erfüllen , wenn außerdem im (separablen) Darstellungsraum $\mathcal{H}$ der $A_{frei}(x)$ gleichzeitig die inhomogene eigentliche orthochrone Lorentzgruppe L eine unitäre Darstellung erfährt , es also einen Satz unitärer Operatoren $U(a,\Lambda)$ stetig in a , Λ in $\mathcal{H}$ so gibt , daß die Darstellungsbedingung $U(a_1,\Lambda_1)U(a_2,\Lambda_2) = \pm U(a_1 + a_2\,,\ a_1 b_2 + b_1)$ erfüllt wird , das zyklische Element invariant ist und die $A_{frei}(x)$ mit den $U(a,\Lambda)$ nach (relativistische Invarianz der Theorie) $U(a,\Lambda)A_{frei}(x)U^{-1}(a,\Lambda) = A_{frei}(\Lambda^{-1}(x-a))$ verknüpft sind , und $\mathcal{H}$ (Teilcheninterpretation) in eine Summe von (symmetrischen bzw. antisymmetrischen) Produkten irreduzibler Darstellungsräume von L des Typs $U_{m,+,s}$ (Einteilchenraum) zerfällt , der das zyklische

Element zu adjungieren ist. Durch eine passend zu wählende Darstellungsbedingung werden die unendlich vielen inäquivalenten Darstellungen der Algebra $A_{frei}(x)$ (bis auf Äquivalenz) auf eine reduziert. Realisieren läßt sich der Darstellungsraum am einfachsten über die $A_{frei}(x)$ konjugierte Fourieralgebra des Problems [1], das heißt der Algebra der zeitunabhängigen Erzeuguns- und Vernichtungsoperatoren $A^{(q)}_{frei}$, $A^{*(q)}_{frei}$, die durch Auflösung von $A_{frei}(x) = \sum_q \left(f_q(x) A^{(q)}_{frei} + f^*_q(x) A^{*(q)}_{frei} \right)$ nach $A^{(q)}_{frei}$, $A^{*}_{frei}{}^{(q)}$ zu gewinnen ist ($f_q(x)$ ist ein vollständiges Lösungssystem von $\Box_x f(x) = 0$), deren Darstellung mit der Darstellungsbedingung $A^{*(q)}_{frei} |0\rangle = 0$ eindeutig wird (FOCK-Darstellung), leicht zu konstruieren ist und eine Teilcheninterpretation im oberen Sinn erlaubt. Man muß dann zeigen, daß im so erhaltenen (Fock-)Darstellungsraum der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren sowohl die $A_{frei}(x)$ eine relativistisch invariante zyklische Darstellung erfahren, als auch, daß die Lorentzgruppe hinsichtlich des Zerfalls in Ein- und Mehrteilchenräume richtig dargestellt werden kann. Ob die FOCK-Darstellung eine sinnvolle Wahl unter den inäquivalenten Darstellungen ist, bleibt offen. Man wird versuchen, bei Strukturuntersuchungen ohne diese teilweise recht einschränkende Forderung auszukommen. Sind mehrere Teilchensorten vorhanden, ist es am einfachsten für jede ein gesondertes freies Feld einzuführen (geschrieben als $A^{(i)}_{frei}(x)$, bzw. $A^{(i)(q)}_{frei}$) und den Produktraum zu benutzen. Als physikalische Parameter gehen die Massen (Spin, usw.; Spinindices sind unterdrückt) in die Theorie ein. Damit ist das freie Feld beschrieben [2].

---

1) Man kann auch von den $A^{(q)}_{frei}$ ausgehen und die $A_{frei}(x)$ im wesentlichen als Fourieralgebra gewinnen.

2) Der Formalismus läßt sich auch auf Felder übertragen, die im Ortsraum andere Eigenschaften haben, als die oben definierten, also andere Bewegungsgleichungen und c-Zahl Vertauschungsrelationen. Ein Beispiel dieser Art ist von BERENDT [8] angegeben worden.

2. Die für die Theorie benötigten ein- oder auslaufenden Teilchen definiert man relativ zwangsläufig durch zwei zunächst nicht näher erklärte Isomorphismen , den in- und out-Isomorphismus , der im Darstellungsraum $\mathcal{G}$ der Fourieralgebra zwei verschiedene , den ein- und auslaufenden Zuständen entsprechende , vollständig normierte Orthonormalsysteme erzeugt $\{\psi^{(\nu)}_{in}, \psi^{(\nu)}_{out}\}$. Die in- und out-Zustände sind dann über eine Matrix - die S-Matrix - verbunden und die berechenbaren Größen Matrixelemente der S-Matrix zwischen diesen Zuständen .
Eine nähere Begründung ist z. B. in [3] durchgeführt .

1.2 Das interpolierende Feld

1. Nach der Definition des ein- und auslaufenden freien Feldes muß zwischen zwei Orthogonalsystemen des Darstellungsraumes $\mathcal{G}$ interpoliert werden . Dazu definieren wir eine *Algebra von Operatoren $A(x)$, deren zyklische Darstellung (zyklisches Element oder Vakuum $|0\rangle$) das interpolierende Feld repräsentiere , und müssen zur Einschränkung der zulässigen $A(x)$ entscheiden , welche Eigenschaften des freien Feldes auf das interpolierende übergehen sollen . Vom Darstellungsfunktional der $A(x)$ wird man wegen der temperiertdistributionswertigen Operatoren des freien Feldes höchstens fordern können , daß es ebenfalls eine temperierte Distribution ist , was zur Bildung der Fourieralgebra ausreicht . Die Invarianzeigenschaften der freien Theorie , die Hermitizität und eventuelle Superauswahlregeln wird man aus physikalischen Gründen vollständig übertragen und $A(x)$ lorentzinvariant ansetzen , also gleichzeitig mit der Lorentzgruppe darstellen und mit den Darstellern von L nach $U(a,\Lambda)\,A(x)\,U^{-1}(a,\Lambda) = A(\Lambda^{-1}(x-a))$ verknüpfen . Das zyklische Element sei wieder invariant und , falls nötig , eindeutig ; das Spektrum von P_o sei passender Gestalt und positiv definit (Spektralbedingung) . Von der Vertauschungsrelation überträgt man als Teilaussage die räumliche Vertauschbarkeit oder Kausalität (Lokalität) $[A(x) , A(y)] = 0 , (x-y)^2 < 0$, was sich nur schwer - über die physikalische Meßbarkeit des interpolierenden Feldes - begründen läßt und die mathematische Struktur der Theorie teilweise wesentlich vereinfacht , teilweise

aber auch kompliziert. Man kann zeigen, daß die einfachste Verallgemeinerung des freien Falles [A(x) , A(y)] = c-Zahl zu keiner Theorie mit Wechselwirkung führt [4]. Die Verallgemeinerung der Ortsraumeigenschaft des freien Feldes $K_x A_{fm}(x) = 0$ auf das interpolierende Feld gibt zusammen mit einer Asymptotenbedingung ebenfalls keine sinnvolle Theorie [3]. Die Fourieralgebra der interpolierenden Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren ist nach ihrer Bildungsvorschrift zeitabhängig $A^{(q)}(t)$, $A^{*(q)}(t)$; sie erlaubt eine einfache Formulierung der Anschlußbedingung , falls die $A^{(q)}(t)$, $A^{*(q)}(t)$ für alle t sinnvolle Operatoren im Hilbertraum des vorigen Abschnittes sind . Damit ist das interpolierende Feld beschrieben .

2. Ob ein solches Gebilde mathematisch existiert ist fraglich [5]. Die Unbeschränktheit des Operators A(x) und der Distributionscharakter des Darstellungsfunktionals bedingen wesentliche Komplikationen [6]. Außerdem sollten auch aus physikalischen Gründen , jedenfalls für das freie Feld , nur verschmierte (oder fastlokale) Feldoperatoren $A_{fm}(f) = \int d^4x\, f(x)\, A_{fm}(x)$ ($f(x)$ Testfunktion) vernünftige Größen sein . Eine geschlossene Theorie verschmierter nicht trivialer interpolierender A(x) ist aber bisher unbekannt und stößt bereits bei einfachen darstellungstheoretischen Fragen auf Schwierigkeiten (es gibt bisher kein positiv definites relativistisch invariantes Darstellungsfunktional) , auch wird die Bildung der Fourieralgebra und die Formulierung der Asymptotenbedingung für verschmierte Felder kompliziert und unübersichtlich [3]. Im Folgenden werden wir auf eine Verschmierung der Felder verzichten und nur indirekt den Distributionscharakter der Matrixelemente beachten . Die Ergebnisse sollten für eine verschmierte Theorie ihre Gültigkeit behalten .

3. Notieren wir noch einmal die wesentlichen Forderungen an das interpolierende Feld als Axiome :

Axiom I (Algebra)

Das interpolierende Feld sei eine zyklische Darstellung (zyklisches Element $|0\rangle$)einer *Algebra A(x) mit einer temperierten Distribution als Darstellungsfunktional .

Axiom II (Invarianz)

Das interpolierende Feld sei lorenzinvariant , d. h. im wesentlichen

$$U(a,\Lambda)A(x)U^{-1}(a,\Lambda) = A(\Lambda^{-1}(x-a)) \; ; \quad U(a,\Lambda)|0\rangle = |0\rangle \; ; \quad P_0 > 0 \; . \tag{1}$$

Axiom III (Kausalität)

Das interpolierende Feld sei kausal

$$[A(x)\,A(y)] = 0 \qquad (x-y)^2 < 0 \; . \tag{2}$$

1.3 Asymptotenbedingung

1.31 Formulierung

1. Zum Anschluß des interpolierenden Feldes an die $A_{out}(x)$, $A_{in}(x)$ benutzt man am einfachsten die mit A(x) gebildeten zeitabhängigen interpolierenden $A^{(q)}(t)$, $A^{*(q)}(t)$, und setzt versuchsweise eine Konvergenz dieser Algebra gegen die mit $A_{in}(x)$, $A_{out}(x)$ gebildeten zeitunabhängigen Algebren $A^{(q)}_{out}, A^{*(q)}_{out}, A^{(q)}_{in}, A^{*(q)}_{in}$ an , wobei für kausale Theorien höchstens eine schwache Konvergenz sinnvoll ist (zum Beweis s. S. 13) . Damit ist eine Asymptotenbedingung (abgekürzt ASB) im Sinne der vorigen Betrachtungen erreicht , die für die Erzeugenden der Algebra mit dem bekannten Ansatz von LSZ übereinstimmt .

Axiom IV (Asymptotenbedingung)

Bildet man die Fourieralgebra des interpolierenden Feldes nach

$$A^{(q)}(x_0') = i \int_{x_0 = x_0'} A(x) \overleftrightarrow{\partial_{x_0}} f_q(x)\, d^3x = i \int_{x_0 = x_0'} \left(A(x) \frac{\partial}{\partial x_0} f_q(x) - f_q(x) \frac{\partial}{\partial x_0} A(x) \right) d^3x \tag{3}$$

so gelte

$$\begin{aligned} \lim_{x_0' \to \pm\infty} \langle \Psi_1 | A^{(q)}(x_0') | \Psi_2 \rangle &= \langle \Psi_1 | A^{(q)}_{\substack{out \\ in}} | \Psi_2 \rangle \\ \lim_{x_0' \to \pm\infty} \langle \Psi_1 | A^{*(q)}(x_0') | \Psi_2 \rangle &= \langle \Psi_1 | A^{*(q)}_{\substack{out \\ in}} | \Psi_2 \rangle \end{aligned} \tag{4}$$

für alle $\Psi_1, \Psi_2 \in \{ \Psi^{(\nu)}_{in} , \Psi^{(\nu)}_{out} \}$ und für alle Teilchensorten .

Zur Formulierung der Konvergenz beliebiger Elemente der Algebra (Produkte und Summen der erzeugenden Elemente), die später bei der Reduktion von Matrixelementen auftreten, wird man bei Produkten (Summen sind trivial) zweckmäßig iterierte Limites benutzen, deren Existenz und Wert durch (4) gewährleistet und bestimmt ist. Z. B. für ein einfaches Produkt

$$\lim_{x_0'\to+\infty}\ \lim_{y_0'\to+\infty} \langle \Psi_1 | A^{(1)\ddagger(q')}(x_0')\, A^{(2)(q)}(y_0') | \Psi_2 \rangle$$

$\langle \Psi_1 | A^{(1)\ddagger(q')}(x_0')$ ist für alle x_0' ein sinnvoller Vektor in $\mathcal{G}$, also existiert der partielle y_0'-Limes und der danach auszuführende x_0'-Limes, die nach (4) berechnet werden müssen. Das Ergebnis ist offenbar von der Reihenfolge der Iteration unabhängig, d.h. die iterierten $x|y$ und $y|x$-Limites sind gleich und man erhält ($\varepsilon, \varepsilon' = \pm 1$, die Verallgemeinerung auf beliebige Elemente der Algebra ist klar)

$$\lim_{\varepsilon x_0'\to\infty}\ \lim_{\varepsilon y_0'\to\infty} \langle \Psi_1 | A^{(1)\ddagger(q')}(x_0')\, A^{(2)(q)}(y_0') | \Psi_2 \rangle = \lim_{\varepsilon y_0'\to\infty}\ \lim_{\varepsilon x_0'\to\infty} \langle \Psi_1 | A^{(1)\ddagger(q')}(x_0')\, A^{(2)(q)}(y_0') | \Psi_2 \rangle$$

$$= \langle \Psi_1 | A^{(1)\ddagger(q')}_{frei}\, A^{(2)(q)}_{frei} | \Psi_2 \rangle \qquad (5)$$

2. Die Verträglichkeit der Konvergenzforderung (4) mit den Axiomen I-III der relativistischen Invarianz und Kausalität ist für Theorien mit Wechselwirkung ein nicht vollständig gelöstes Problem [31]. Wir werden diese Frage im nächsten Abschnitt an Beispielen untersuchen und zeigen, daß Existenz und Wert zumindest spezieller iterierter (und gleichzeitiger) Limites, auch solche, über die die Asymptotenbedingung (4) keine Aussage macht, direkt aus Invarianz und Kausalität folgen, also Teilaussagen der ASB beweisbar sind. Es ist zu vermuten, daß relativistische Theorien im Sinne von I-III (mit geringen, wohl durch die Beweistechnik bedingten, mathematischen Einschränkungen) stets eine konvergente Operatoralgebra liefern; die Limites der $A^{(i)(q)}(x_0')$ sollten also stets schwach existieren; durch sinnvolle Zusatzforderungen lassen sich dann die Konvergenzelemente $A^{(i)(q)}_{frei}$ als Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren

in der FOCK-Darstellung erreichen . Eine derartige Umformulierung der Theorie , die 1. die Asymptotenbedingung als gruppentheoretische Konsequenz der L-Gruppe enthält, 2. mathematische Schwierigkeiten umgeht , die mit der Existenz von A(x) als sinnvoller Operator in $\mathcal{G}$ verbunden sind , soll hier nicht gegeben werden .

3. Eine etwas schwächere , aber im allgemeinen ausreichende ASB erhält man , wenn (4) auf solche Vektoren $\psi^{(\nu)}$ beschränkt wird , die zu endlichen Teilchenzahlen ν des v.n.o. der in- bzw. out-Zustände gehören ; das scheint physikalisch gerechtfertigt zu sein , da asymptotisch stets endlich viele freie Teilchen vorliegen , zu denen das betrachtete auslaufende hinzukommt . Allerdings läßt sich dann Gleichheit und Existenz der iterierten Limites nicht mehr beweisen[1] - die $\langle\psi_1|A^{(1)*(q')}(x_0')$ sind i.a. kein Vektor mehr , für den (4) gilt -, damit wird eine Erweiterung der ASB auf Operatorprodukte nötig , z. B.

Asymptotenbedingung für einen Operator

$$\lim_{\varepsilon x_0' \to \infty} \langle\psi^{(\nu)}|A^{(1)*(q')}(x_0')|\psi^{(\mu)}\rangle = \langle\psi^{(\nu)}|A^{(1)*(q')}_{\text{frei}}|\psi^{(\mu)}\rangle \quad , \tag{6}$$

Asymptotenbedingung für Operatorprodukte

$$\lim_{\varepsilon x_0' \to \infty}\lim_{\varepsilon y_0' \to \infty} \langle\psi^{(\nu)}|A^{(1)*(q')}(x_0')A^{(2)(q)}(y_0')|\psi^{(\mu)}\rangle = \lim_{\varepsilon y_0' \to \infty}\lim_{\varepsilon x_0' \to \infty} \langle\psi^{(\nu)}|A^{(1)*(q')}(x_0')A^{(2)(q)}(y_0')|\psi^{(\mu)}\rangle = \langle\psi^{(\nu)}|A^{(1)*(q')}_{\text{frei}}A^{(2)(q)}_{\text{frei}}|\psi^{(\mu)}\rangle \quad , \tag{7}$$

mit $\psi^{(\nu)}, \psi^{(\mu)}$ Zustandsvektoren für n-Teilchenzustände ($\mu, \nu \leq \mu_0 < \infty$)usw.. Ob solche ASB formal nützlich sind , ist unbekannt . Jedenfalls kommt man in den folgenden Rechenverfahren , wie allgemein in reinen Streutheorien (Beweis von Dispersionsrelationen usw.) mit (6) und (7) aus . Die schärfere Forderung (4) wird nicht voll genutzt , ausgenommen bei einer formalen Ersetzung der Axiome durch ein unendliches r oder τ -Gleichungssystem [4]. Bei einer Zweiteilchenstreuung genügt (7) ,

---

[1] Fordert man die ASB für alle ν (also ohne Beschränkung $\nu \leq \mu_0$) folgt (4) .

falls bis zu Einteilchenzuständen und eine entsprechende Forderung bis zu vierfachen Produkten , falls auf Vakuumerwartungswerte reduziert wird .

Eine leichte Abschwächung von (7) liefert ein Lemma , das die Existenz und Gleichheit der einzelnen iterierten Limites der ASB eines mehrfachen Produktes teilweise aufeinander zurückführt . Für ein einfaches Produkt findet man über den Greenschen Satz , daß aus (4) und der Existenz von $x_o|y_o(+\infty|+\infty)$ und $x_o|y_o(-\infty|-\infty)$ die Existenz und Gleichheit von $x_o|y_o(-\infty|+\infty), y_o|x_o(+\infty|-\infty)$ folgt[1] . Analoge Aussagen gelten für mehrfache Produkte[2] .

4. Ändert man die charakteristische Forderung (5) , daß Operatorprodukte als iterierte Limites konvergieren sollen , ab und läßt die Faktoren alternativ nicht hintereinander , sondern gleichzeitig im Sinne eines totalen Limes ins Asymptotische laufen[3]

$$\lim_{\varepsilon y_o' \to \infty} \langle \Psi_1 | A^{(1)*(q')}(y_o') A^{(2)(q)}(\varepsilon' y_o') | \Psi_2 \rangle = \lim_{\varepsilon y_o' \to \infty} M(y_o', \varepsilon' y_o') \quad , \tag{8}$$

so folgt Existenz und Wert des totalen Limes nicht aus der ASB (4)[4] ; man erhält eine andere Theorie in der neben (4) die Existenz aller benötigten gleichzeitiger Limites (8) zu fordern ist , z. B.

$$\lim_{\varepsilon y_o' \to \infty} M(y_o', \varepsilon' y_o') = \langle \Psi_1 | A^{(1)*(q')}_{\text{fm}} A^{(2)(q)}_{\text{fm}} | \Psi_2 \rangle \quad .$$

Natürlich schränken solche Zusätze die Theorie im Vergleich zu der aus I-IV folgenden stark ein . Wählt man z. B. $\Psi_1 = \Psi_2$, $A^{(2)} = A^{(1)}$, $q = q'$, $\varepsilon' = +1$

---

1) Schreibweise $x_o|y_o(+\infty|+\infty) = \lim_{x_o \to +\infty} \lim_{y_o \to +\infty}$ usw.

2) Folgerung über das Konvergenzverhalten aus der Existenz und Gleichheit der iterierten Limites liefern keine verwendbaren Resultate .

3) Werden die Faktoren in einem festen Abstand a_o gleichzeitig asymptotisch , also $\lim \langle \Psi_1 | A^{(1)*(q')}(y_o') A^{(2)(q)}(y_o' + a_o) | \Psi_2 \rangle$, ergeben sich analoge Folgerungen .

4) Existenz und Gleichheit der iterierten Limites und Existenz des Partiellen liefert nicht die Existenz des totalen Limes .

so liefert (8) $A^{(1)*}A^{(1)} \to A^{(1)*}_{in\ out} A^{(1)}_{in\ out}$, woraus mit $A^{(1)} \to A^{(1)}_{in\ out}$ starke Konvergenz von $A^{(1)}$ folgt : $A^{(1)(q)} \to A^{(1)(q)}_{frei}$, die unter Beachtung der Kausalität nach einem Äquivalenztheorem (siehe Seite 13) zu $A^{(1)}(x) = A^{(1)}_{frei}(x)$, also auf den trivialen Fall führt . Für den Schluß war wesentlich , daß nicht nur die Existenz , sondern auch der Wert des Limes gefordert wurde[1] . Analoges gilt für das Verfahren in (6) und (7) . Forderung (8) schließt wechselwirkende Felder im allgemeinen aus und man wird in einer Theorie nach I-IV versuchen , ohne Zusatz (8) auszukommen , was nicht immer durchführbar ist . In den konsequenten Reduktionsverfahren der nächsten Abschnitte treten unter Umständen gleichzeitige Limites des Typs $\lim_{\varepsilon x_0 \to \omega} \langle \Psi_1 | A^{(1)(q)}(x_0) A^{(2)(q)}(x_0') | \Psi_2 \rangle$ auf - glücklicher Weise stets als Differenz - , von denen man mit I-IV beweisen muß , daß ihre Konvergenz gegen einen sinnvollen Wert als Zusatzforderung die Theorie nicht trivial macht ; nach den oberen Bemerkungen wird dies ohne Benutzung der ASB allein durch Beachtung von Lorentzinvarianz und Kausalität möglich sein . Vorauszusetzen ist nur $\Psi_1, \Psi_2 \neq |0\rangle$, was von interessierenden Streumatrixelementen erfüllt wird .

5. Eine interessante rechentechnische Konsequenz ist die Nichtvertauschbarkeit des totalen Limes in (8) mit einer Zwischenzustandssumme $\sum_z' |z\rangle\langle z|$ [2] ($|z\rangle$ vollständiges System von Eigenzuständen zum Energieimpuls-Operator) , während die iterierten Limites in die Summe hineingezogen werden dürfen .

6. In welcher Weise sich die Ausdrücke (4) - (8) auf die WIGHTMANsche ASB [7]

$$A_{in}(x) = A(x) + \int \Delta_{ret}(x-x') j(x') d^4x' \quad , \quad j(x) = \square_x A(x)$$

---

1) Eine nähere Untersuchung [3] macht plausibel , daß derartige Schwierigkeiten für lorentzinvariante Darstellungen konvergierender Operatoralgebren charakteristisch sind .

2) Wäre $\lim_{\varepsilon x_0' \to \omega}$ mit $\sum_z'$ vertauschbar , würde der Limes nach ASB existieren und das Äquivalenztheorem die Theorie auf freie Felder einengen .

übertragen , soll hier nicht im einzelnen untersucht werden , ebenso nicht die Äquivalenz von (9) u. (4) und die Äquivalenzen mit weiteren möglichen Formulierungen [3] . Umgehen lassen sich die unerwünschten Eigenschaften des totalen Limes in keiner Formulierung .

1.32 Konvergenzbetrachtungen

1. Zur Untersuchung der Konvergenz bestimmter Matrixelemente ohne Benutzung der ASB gibt es , je nach der Form der betrachteten Ausdrücke , eine Reihe von Methoden , welche die zur Verfügung stehenden Axiome I-III verschieden stark ausnutzen . Die interessierenden Matrixelemente teilt man dazu zweckmäßigerweise in zwei Gruppen , in eine , deren Konvergenzverhalten von einer ASB bestimmt würde und in eine andere , deren Konvergenzverhalten auch in Theorien mit ASB offen ist . Eine Analyse der ersten Gruppe würde zu einer Ableitung der ASB führen und soll hier nicht versucht werden .
Die zweite Gruppe wird im Zusammenhang mit den in Abschnitt 2.1 definierten konsequenten Reduktionsverfahren interessant . Man benötigt dort z. B. , daß der gleichzeitige Limes eines Kommutators
(statt $A^{(i)(q)}(x_0'), A^{(i)*(q)}(x_0')$ ist $A^{(i)}_{f}(x_0'), A^{(i)}_{f^*}(x_0')$ geschrieben) nach

$$\lim_{\Sigma x_0' \to \infty} \langle \Psi_1 | [A^{(1)}_{f}(x_0') A^{(2)}_{g}(x_0')] | \Psi_2 \rangle = \langle \Psi_1 | [A^{(1)}_{f, f_{\alpha i}} A^{(2)}_{g, f_{\alpha i}}] | \Psi_2 \rangle \qquad \text{d.h.:} \qquad (10)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{für } A^{(2)} \neq A^{(1)}, A^{(1)*} \text{ ; für } A^{(2)} = A^{(1)} \text{ falls } f \neq g^* \qquad (10a) \\ \langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle & \text{falls } A^{(1)} = A^{(2)} \text{ und } f = g^* \qquad (10b) \end{cases}$$

eine sinnvolle Zusatzforderung ist , und muß zeigen , daß aus (10) mit den Axiomen I-III kein Widerspruch folgt und die Theorie nicht auf freie Felder beschränkt wird . Wir werden dazu die Limites durch Spektralfunktionen ausdrücken , also deren Existenz und Wert ableiten , und

beweisen, daß durch (10) die Spektralfunktionen nicht auf die einer freien Theorie reduziert werden. Für einen anderen Typ von Matrixelementen

$\lim_{\varepsilon x_0' \to \infty} \langle p'|A^{(1)*}(q')(x_0) A^{(2)(q)}(x_0')|p\rangle$ braucht man die Unabhängigkeit der Limites von ε; eine stärkere Aussage läßt sich mangels einer Spektralbedingung für Operatorprodukte nicht erreichen.

2. Durch Einsetzen der $A^{(1)}_{f}(x_0)$, $A^{(2)}_{g}(x_0)$ führt man die Matrixelemente (10) auf die Berechnung gleichzeitiger Kommutatoren der interpolierenden Felder zurück

$$\langle \Psi_1|[A^{(1)}_f(x_0) A^{(2)}_g(x_0)]|\Psi_2\rangle = -\iint_{x_0=x_0'} d^3x\, d^3x' \Big(\dot f_x g_{x'} \langle \Psi_1|[A^{(1)}(x) A^{(2)}(x')]|\Psi_2\rangle + f_x \dot g_{x'} \langle \Psi_1|[A^{(2)}(x') \dot A^{(1)}(x)]|\Psi_2\rangle + \tag{11}$$

$$+ \dot f_x g_{x'} \langle \Psi_1|[\dot A^{(2)}(x) A^{(1)}(x)]|\Psi_2\rangle + f_x g_{x'} \langle \Psi_1|[\dot A^{(1)}(x) \dot A^{(2)}(x')]|\Psi_2\rangle \Big) .$$

In den Kommutatoren lassen sich Axiom I-III durch eine hinreichende und teilweise notwendige Integraldarstellung, der DYSON-Darstellung [9] für $\Psi_1, \Psi_2 \neq |0\rangle$ und der LEHMANN-Darstellung [10] für $\Psi_1 = \Psi_2 = |0\rangle$ berücksichtigen. Für den einfachsten Fall $A^{(1)}(x) = A^{(2)}(x)$ erhält man (Teilchen der Massen m)[1]

$$\langle 0|[A(x) A(x')]|0\rangle = -i \int_0^\infty d\varkappa^2\, \Delta(x-x', \varkappa^2)\, \sigma(\varkappa^2)$$

$$\sigma(\varkappa^2) = \delta(\varkappa^2 - m^2) + \Theta(\varkappa^2 - 4m^2)\, \sigma(\varkappa^2) \quad ; \quad \sigma(\varkappa^2) \geq 0 \tag{12}$$

und in (11), falls unter dem $d\varkappa^2$ Integral nach x_0 differenziert werden darf (wir wollen uns auf solche Fälle beschränken)

$$\langle \Psi_1|[A_f(x_0), A_g(x_0)]|\Psi_2\rangle = i \Big(1 + \int_{4m^2}^\infty d\varkappa^2 \sigma(\varkappa^2)\Big) \cdot \int f(x) \overleftrightarrow{\partial_{x_0}} g(x)\, d^3x$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{für } g(x) \neq f^*(x) \\ \Big(1 + \int_{4m^2}^\infty d\varkappa^2 \sigma(\varkappa^2)\Big) & \text{für } g(x) = f^*(x) \end{cases} , \tag{13}$$

da $f(x), g(x)$ Lösungen von $(\Box^2 - m^2) h(x) = 0$ sind. Der Limes existiert also,

---

1) Kausalität braucht in diesem Fall nicht gefordert zu werden, sondern folgt aus Invarianz u. Spektralbed. Das interpolierende Feld ist hermitisch.

liefert aber nicht das erwartete Ergebnis (10b), es sei denn, man verlangt von der Spektralfunktion $\sigma(\varkappa^2)$, daß

$$\int_{4m^2}^{\infty} \sigma(\varkappa^2)\, d\varkappa^2 = 0 \quad , \tag{14}$$

was wegen (12) zu

$$\sigma(\varkappa^2) \equiv 0 \tag{14'}$$

führt, also zur Spektralfunktion freier Teilchen. Damit könnte die Theorie bereits auf den trivialen Fall beschränkt sein, ist es aber noch nicht ganz (freie Teilchen sind nicht nur durch (14') gekennzeichnet; (14') verbietet nur Zweiteilchenstreuung [11, 12]), höhere Prozesse kommen noch vor und werden erst durch Hinzunahme der Kausalität ausgeschlossen, dann folgt $A(x) = A_{f,\mathrm{frei}}(x)$. Damit ist gezeigt, daß (10b) für $\Psi_1 = \Psi_2 = |0\rangle$ und $A^{(1)} = A^{(2)}$, $f(x) = g^*(x)$ nicht mit wechselwirkenden kausalen Feldern verträglich ist. Charakteristisch ist, daß nicht die geforderte Existenz, sondern der geforderte Wert des Limes dieses Ergebnis lieferte.

Da eine zu (12) analoge Integraldarstellung auch für $\langle 0|A(x)\,A(x')|0\rangle$ gilt (Δ ist durch $\Delta^{(+)}$ zu ersetzen), beweist man mit der gleichen Methode, daß aus der starken Konvergenz $A^{(1)}_f(x_0) \longrightarrow A^{(1)}_{f,\mathrm{frei}}$ d. h. aus $\langle\Psi_1|A^{(1)}_f(x_0)\,A^{(1)}_{f^*}(x_0)|\Psi_2\rangle \to \langle\Psi_1|A^{(1)}_{f,\mathrm{frei}}\,A^{(1)}_{f^*,\mathrm{frei}}|\Psi_2\rangle$ und der ASB (4) wieder (14') folgt, womit die obere Argumentation zu streuungsfreien Theorien oder, für kausale Felder, zu $A(x) = A_{f,\mathrm{frei}}(x)$ führt (Äquivalenztheorem).

3. Für ungleiche Felder $A^{(1)} \neq A^{(2)}$ läßt sich eine brauchbare Integraldarstellung nur herleiten, wenn man TCP-Invarianz oder, äquivalent dazu, schwache Lokalität zwischen $A^{(1)}$ und $A^{(2)}$ fordert, $A^{(1)}(x)$ und $A^{(2)}(x)$ müssen also zur gleichen BORCHERS-Klasse gehören [13]. Dann erhält man wieder (12) (im allgemeinen ohne die angegebene Zerlegung von $\sigma(\varkappa^2)$ und ohne $\sigma(\varkappa^2) \geqslant 0$) und mit (11)

$$\langle 0|[A^{(1)}_f(x_0)\,A^{(2)}_g(x_0)]|0\rangle = -i \int_0^{\infty} \sigma_{1,2}(\varkappa^2)\, d\varkappa^2 \cdot \int f(x) \overleftrightarrow{\partial_{x_0}} g(x)\, d^3x$$

Ausrechnung des Integrals gibt ($\varphi(x)$ und $g(x)$) sind Lösungen verschiedener KLEIN-GORDON-Gleichungen)

$$\langle 0|[A^{(1)}_{\varphi}(x_0)A^{(2)}_{g}(x_0)]|0\rangle = -i\int_0^\infty \sigma_{1,2}(\varkappa^2)d\varkappa^2 \cdot \text{const}\cdot e^{-i\lambda x_0} \quad , \lambda \text{ reell} \quad . \tag{15}$$

Der Limes existiert im Gegensatz zu (13) nur , falls

$$\int_0^\infty \sigma(\varkappa^2)d\varkappa^2 = 0 \tag{16}$$

und liefert (10a) . Wegen $\sigma \lesseqgtr 0$ ist (16) eine sinnvolle Zusatzforderung und mit wechselwirkenden Feldern verträglich .

4. Für beliebige Ψ_i $(\neq |0\rangle)$ sind die Konvergenzuntersuchungen komplizierter . Man muß korrekterweise mit Wellenpaketen rechnen , weil die Regel der Störungstheorie , daß Matrixelemente für ebene Wellen und für Wellenpakete gleiche Resultate liefern , falsch werden kann , etwa bei Bestimmung der minimalen analytischen Eigenschaften und insbesondere bei Untersuchung der Konvergenz , wie man an Beispielen leicht nachweist (z. B. folgt aus (4) mit Translationsinvarianz $A(x) = A_{f(x)}(x)$) . Die bekannte Integraldarstellung für den kausalen Kommutator , dessen Felder die Spektralbedingung erfüllen , läßt sich also in der von DYSON angegebenen Form [9 , 15] nicht verwenden und muß auf Wellenpakete übertragen werden . Für die Kausalität , also für eine Teilaussage , ist dies leicht möglich . Kausale , invariante Kommutatoren erfüllen im Ortsraum hinreichend und notwendig

$$\langle \Psi_1|[A^{(1)}(x)A^{(2)}(x')]|\Psi_2\rangle = -i\int_0^\infty d\varkappa^2\, \Delta(x-x';\varkappa^2)\, \widetilde{\varphi}_{\Psi_1,\Psi_2;1,2}(x,x';\varkappa^2) \tag{17a}$$

Die Berücksichtigung der Spektralbedingung in $\widetilde{\varphi}$ (die Abhängigkeit von $\Psi_{1,2}$ und $A^{(1),(2)}$ ist als Index geschrieben) ist dagegen schwieriger . Im Vergleich zum Resultat von DYSON der für ebene Wellen eine einfache Trägereigenschaft von $\widetilde{\varphi}_{\Psi_1\Psi_2;1,2}(x,x';\varkappa^2)$ bzw. von $\widetilde{\varphi}_{p_1,p_2;1,2}(x-x';\varkappa^2)$

$$\widetilde{\varphi}_{\Psi_1\Psi_2;1,2}(x,x';\varkappa^2) = \exp i\left[\frac{p_1-p_2}{2}(x+x')\right]\widetilde{\varphi}_{p_1,p_2;1,2}(x-x';\varkappa^2) \tag{17b}$$

im Fourierraum erhält ($\varphi(u,\varkappa^2)$ Fouriertransformierte von $\widetilde{\varphi}_{p_1,p_2}(x-x';\varkappa^2)$)

$$\varphi(u,\varkappa^2) = 0 \quad \text{falls } u \in S$$

$$S: \text{alle } u \text{ mit } \left\{ \frac{P_1+P_2}{2} \pm u \in L_+ \;;\; \varkappa \gg \text{Max}\left[0;\, m_1 - \sqrt{\left(\frac{P_1+P_2}{2}+u\right)^2};\, m_2 - \sqrt{\left(\frac{P_1+P_2}{2}-u\right)^2}\right] \right\} \tag{17c}$$

m_i sind die niedrigsten Massen, zu denen Zustände ℓ_i möglich sind mit

$\langle \psi_1 | A^{(1)}(0) | \ell_1 \rangle \langle \ell_1 | A^{(2)}(0) | \psi_2 \rangle \neq 0$ und $\langle \psi_1 | A^{(2)}(0) | \ell_2 \rangle \langle \ell_2 | A^{(1)}(0) | \psi_2 \rangle \neq 0$; $m_i = \text{Min}\sqrt{\ell_i^2}$,

liefern Wellenpakete ein Analogon zu (17c) mit einem verwickelten Bereich S ; wir werden davon in einem anderen Zusammenhang berichten . Im Folgenden kommt man mit (17a) aus[1] .

Setzt man (17a) in (11) ein , folgt z. B.

$$\langle \psi_1 | [A^{(1)}_f(x_0) A^{(2)}_g(x_0)] | \psi_2 \rangle = -i \int f(x) \overleftrightarrow{\partial_{x_0}} g^*(x)\, e^{i(P_1-P_2)x}\, d^3x \int_0^\infty d\varkappa^2\, \tilde{\varphi}_{P_1P_2;1,2}(0,\varkappa^2) \quad , \tag{18}$$

also

$$\langle \psi_1 | [A^{(1)}_f(x_0) A^{(2)}_{g^*}(x_0)] | \psi_2 \rangle = \frac{\omega_f + \omega_g}{\sqrt{4\omega_f\omega_g}}\, e^{-i(\omega_f-\omega_g+\omega_1-\omega_2)x_0}\, \delta^{(3)}(\vec{p}_f - \vec{p}_g + \vec{P}_1 - \vec{P}_2) \int_0^\infty d\varkappa^2\, \tilde{\varphi}_{P_1P_2;1,2}(0,\varkappa^2) \tag{19}$$

Für Matrixelemente auf der Energieschale fällt die Zeitabhängigkeit heraus und der Vergleich mit (10) gibt eine Forderung an $\tilde{\varphi}_{1,2}$, die nicht auf das $\tilde{\varphi}_{1,2}$ freier Felder führt , etwa für den Spezialfall $A^{(1)} = A^{(2)}$, $f(x) = g(x)$, $\psi_1 = \psi_2$

$$\int_0^\infty d\varkappa^2\, \tilde{\varphi}_{P_1P_1;1,1}(0,\varkappa^2) = 1 \quad , \tag{20}$$

oder nach (17c)

$$\int_0^\infty d\varkappa^2 \int_{S_{1,1}} d^4u\, \varphi_{P_1P_1;1,1}(u,\varkappa^2) = 1 \tag{21}$$

---

1) Zur Vereinfachung werden ebene Wellen eingesetzt . Man rechnet das Ergebnis leicht (aber umständlich) für Wellenpakete nach , was plausibel ist , weil nur die Eigenschaften der Δ -Funktion ausgenutzt werden , die in beiden Fällen auftritt . Der Ansatz ebener Wellen trägt zur bequemen Ausführung der Integration bei .

mit

$$S_{1,1}: \text{alle } u \text{ mit } \left\{ P_i \pm u \in L_+ \; ; \; \varkappa \gg \max\left[0; \; m - \sqrt{(P_i \pm u)^2}\right] \right\} \quad .$$

Funktionen $\widetilde{\varphi}_{P_1 P_2; 1,1}$ mit (21) lassen sich finden . Beliebige Matrixelemente liefern ähnliche von $\varkappa, f, g$ abhängende miteinander vereinbare Beziehungen .

Zusatzforderungen der Form (10) sind also ($\Psi_i \neq |0\rangle$) mit wechselwirkenden Feldern und Axiom I-III in folgendem Sinn verträglich : Man kann Spektralfunktionen , die die Bedingungen der auf Wellenpakete verallgemeinerten DYSON-Darstellung erfüllen , so wählen , daß (10) gilt , ohne notwendig $A(x) = A_{free}(x)$ zu erreichen . Der Bereich der zulässigen Spektralfunktion wird dadurch eingeschränkt , was eine Einschränkung der Wechselwirkung bedeutet , deren physikalischer Sinn unklar bleibt . Das obere Verfahren läßt sich auch auf Konsistenzuntersuchungen im Zusammenhang mit weiteren Postulaten - etwa doppelten Dispersionrelationen (Impulsraumaxiomatik) oder CHEW-LOW-Gleichungen (Abschnitt 3.3) - anwenden.[1)]

In Bedingung (10) wurden nur die algebraischen Eigenschaften der Vertauschungsrelationen freier Felder aber keine spezielle Darstellungseigenschaft benutzt , so daß sich (10) in der FOCK-Darstellung verschärfen läßt und zu entsprechend stärkeren Forderungen an die Spektralfunktionen $\widetilde{\varphi}_{\Psi_1 \Psi_2; 1,2}$ führt , die die Abhängigkeit von den Indices $\Psi_1 \Psi_2; 1,2$ und von den mit den Impulsen verbundenen Teilchensorten und deren Superauswahlregeln betreffen .

5. Für Matrixelemente des Typs $\lim_{\varepsilon x_0' \to \infty} \langle \Psi_1 | A^{(n)*(q)}(x_0') \, A^{(n)(q)}(x_0') | \Psi_2 \rangle$ gibt es keine Integraldarstellung . Mit Translationsinvarianz läßt sich zeigen , daß

---

1) Man kann z. B. die später abgeleitete reduzierte Form des S-Matrix-Elementes ohne ASB erhalten , wenn sich diese Überlegungen auch auf iterierte Limites der Form $\lim_{x_0' \to +\infty} \lim_{y_0' \to -\infty} \langle \Psi_1 | [A^{(n)*(q)}(x_0') \, A^{(n)(q)}(y_0')] | \Psi_2 \rangle$ (Ψ_i Einteilchenzustände) übertragen lassen .

$$\lim_{x_0' \to +\infty} \left(\langle \Psi_1 | A^{(1)*(q')}(x_0') A^{(2)(q)}(x_0') | \Psi_2 \rangle - \langle \Psi_1 | A^{(1)*(q')}(-x_0') A^{(2)(q)}(-x_0') | \Psi_2 \rangle \right) = 0 \qquad (22)$$

gilt , der Limes also von $\mathcal{E}$ unabhängig ist . Für ebene Wellen Ψ_i ist das in Matrixelementen auf der Energieschale sofort , für Wellenpakete erst nach längerer Rechnung zu sehen . Man schiebt (Translationsinvarianz) die $A^{(i)(q)}(x_0')$ auf 0 zurück , setzt für Ψ_i Wellenpakete ein , und diskutiert das asymptotisch zeitliche Verhalten etwa nach der Methode der stationären Phase (siehe [14]) . Auf Kommutatoren läßt sich (22) übertragen , wie auch aus dem oben unter spezielleren Voraussetzungen abgeleiteten Konvergenzverhalten folgt . Weitere Aussagen erhält man unter zusätzlicher Beachtung der FOCK-Darstellung , indem man die Matrixelemente zu Kommutatoren ergänzt und die oben abgeleiteten Resultate ausnutzt .

2. Reduktionsverfahren

Mit der Asymptotenbedingung werden alle Matrixelemente zwischen Vektoren aus $\mathcal{H}_y$ auf iterierte Limites von Oberflächenintegralen über das Darstellungsfunktional des interpolierenden Feldes $A(x)$ zurückgeführt ("reduziert") und durch Vorgabe des Funktionals bzw. durch $A(x)$ bestimmt. Man zeigt dies durch Einsetzen der ASB in die Matrixelemente, z. B. für die S-Matrix einer Zweiteilchen-Streuung (auslaufende Teilchen p',q' einlaufende Teilchen p,q, Massen m_1, m_2), wenn bis zu Einteilchen-Zuständen $|q\rangle = |q\rangle_{in} = |q\rangle_{out}$ reduziert wird.

$$\langle p'q'|S|pq\rangle_{out\ out} = \langle p'|A^{(1)*(q')}|pq\rangle_{in} = \langle p'|A^{(1)*(q')}_{out}\, A^{(2)(q)}_{in}|p\rangle$$

$$= \lim_{x_0'\to+\infty} \langle p'|A^{(1)*(q')}(x_0')|pq\rangle_{in} = \lim_{x_0'\to+\infty}\lim_{y_0'\to-\infty} \langle p'|A^{(1)*(q')}(x_0')\,A^{(2)(q)}(y_0')|p\rangle \qquad (1)$$

d. h.

$$\langle p'q'|pq\rangle_{out\ in} = -i \lim_{x_0'\to+\infty} \langle p'| \int_{x_0'} A^{(1)}(x) \overleftrightarrow{\partial_{x_0}} f_x^*\, d^3x |pq\rangle_{in} = \lim_{x_0'\to+\infty}\lim_{y_0'\to-\infty} \langle p'| \int_{x_0'} A^{(1)}(x) \overleftrightarrow{\partial_{x_0}} f_x^*\, d^3x \int_{y_0'} A^{(2)}(y) \overleftrightarrow{\partial_{y_0}} f_y\, d^3y |p\rangle \qquad (1')$$

Weiteres Reduzieren erzeugt höhere iterierte Limites. Die Matrixelemente sind dann Funktionale der $A(x)$, auf die sich die in I-III geforderten Eigenschaften in irgendeiner Weise übertragen sollten. Zur Untersuchung solcher und ähnlicher Fragen ist die von der ASB gelieferte Art der Abhängigkeit von $A(x)$ zu unübersichtlich und nur schwer verwendbar. Man wird versuchen, zumindest die rechentechnisch ungünstige Limesbildung an Oberflächenintegralen zu umgehen. Dazu werden im Folgenden im Anschluß an das bekannte Verfahren von LSZ [2] einige verallgemeinerte Methoden (Reduktionsverfahren) hergeleitet. Für Abwandlungen und Umformungen dieses Verfahrens ergeben sich Regeln, in welchem Sinn die auftretenden Integrale korrekt zu verstehen sind. Wir werden weiter im einzelnen untersuchen, welche Eigenschaften (Translationsinvarianz, Spektralbedingung, FOCK-Darstellung) der Felder unvermeidbar in die Reduktionsformeln eingehen. Wir werden also nicht nach einfachen Reduktionsformeln suchen, sondern nach solchen, die mit einem

Minimum an Voraussetzungen auskommen und möglichst nur die ASB benutzen . Im allgemeinen werden Zusatzforderungen nötig sein , von deren Verträglichkeit mit I-IV man sich zu überzeugen hat .

2.1 Charakterisierung der Verfahren

Zur Beseitigung der Oberflächenintegrale in (1) ist eine Umformung in Volumenintegrale ausreichend , an denen alle Limites leicht ausführbar sind . Sie wird für eine Differenz zweier Oberflächenintegrale vom Greenschen Satz geleistet (der Integrand muß räumlich stark genug verschwinden)

$$\int_{x_0=b} A(x) \overleftrightarrow{\partial_{x_0}} f_x \, d^3x = \int_{x_0=a} A(x) \overleftrightarrow{\partial_{x_0}} f_x \, d^3x + \int_a^b dx_0 \int d^3x \, f_x \, \mathrm{H}_x A(x) \quad ; \quad \mathrm{H}_x f(x) = 0 \qquad (2)$$

dessen Anwendung auf das Oberflächenintegral einer ASB zunächst zwecklos zu sein scheint , da für jedes beseitigte Oberflächenintegral ein neues mit entsprechend anderen Grenzen auftritt . Nun ist aber durch die ASB und Axiom I-III das interpolierende Feld $A(x)$ bzw. $\mathrm{H}_x A(x)$ nicht im ganzen Ortsraum festgelegt [16] , und man kann versuchen $A(x)$ in $A'(x)$ so abzuändern , daß das Integral bei $x_0 = b$ $(b \to +\infty)$ für A(x) und A'(x) gleiche Werte liefert , bei $x_0 = a$ $(a \to -\infty)$ aber verschwindet oder eine vorgegebene Form annimmt . Um Konsistenzuntersuchungen möglich zu machen , hat man A'(x) weiter so einzurichten , daß es neben der ASB in einer Richtung die Forderungen I-III , insbesondere die der relativistischen Invarianz erfüllt[1] .

Das skizzierte Verfahren zur Umformung ist natürlich nicht eindeutig ; im allgemeinen gibt es eine ganze Klasse von Feldern A'(x) , die zu verschiedenen äquivalenten Formen der Matrixelemente führen und durch

---

1) Für eine einfache Berechnung der Matrix-Elemente genügt es z. B. im Laborsystem zu rechnen , wodurch mehr Felder A'(x) zur Verfügung stehen .

Vergleich gewisse Strukturaussagen ermöglichen . Betrachtet man z. B. die Anwendung von (2) ohne Änderung der Felder in

$$\begin{aligned} {}_{out}\langle p'q'|pq\rangle_{in} &= -i \lim_{x_0'\to\infty} \langle p'| \int_{x_0'} A^{(-)}(x)\, \partial_{x_0} f_x^*\, d^3x |pq\rangle_{in} = \\ &= -i \lim_{x_0'\to-\infty} \langle p'| \int_{x_0'} A^{(+)}(x)\, \partial_{x_0} f_x^*\, d^3x |pq\rangle_{in} - i \lim_{x_0'\to+\infty} \langle p'| \int_{-x_0'}^{+x_0'} dx_0 \int d^3x\, f_x^* \overleftrightarrow{\Box}_x A^{(-)}(x)|pq\rangle_{in} \end{aligned} \qquad (3)$$

bekommt man (da S und der erste Limes der linken Seite existiert , tut es auch der zweite)

$${}_{out}\langle p'q'|pq\rangle_{in} = {}_{in}\langle p'q'|pq\rangle_{in} - i\langle p'| \int d^4x\, f_x^* \overleftrightarrow{\Box}_x A^{(-)}(x)|pq\rangle_{in} \qquad (4)$$

die Abspaltung der 1 und einen Ausdruck für die nachbleibende T-Matrix . Ein anderes Ergebnis liefert eine Änderung des Feldes nach

$$A^{(+)}(x) \longrightarrow A'^{(+)}(x) = \Theta(x) A^{(+)}(x) \;;\; \Theta(x) = \tfrac{1}{2}(\varepsilon(x)+1) \;,\; \varepsilon(x) = \operatorname{sign} x_0$$

A'(x) ist relativistisch invariant ; Limes-Rechenregeln geben

$$\left.\begin{matrix} \lim \\ x_0'\to+\infty \\ \lim \\ x_0'\to-\infty \end{matrix}\right\} \langle p'| \int_{x_0'} A'^{(-)}(x) \overleftrightarrow{\partial_{x_0}} f_x^*\, d^3x |pq\rangle_{in} \left.\vphantom{\begin{matrix} \lim \\ x_0'\to+\infty \\ \lim \\ x_0'\to-\infty \end{matrix}}\right\} = \left\{\begin{matrix} \lim_{x_0'\to+\infty} \langle p'| \int_{x_0'} A'^{(-)}(x) \overleftrightarrow{\partial_{x_0}} f_x^*\, d^3x |pq\rangle_{in} + \lim_{x_0'\to+\infty} \delta(x_0')\langle p'| \int_{x_0'} A'^{(-)}(x)\, f_x^*\, d^3x |pq\rangle_{in} \\ 0 \qquad\qquad + \lim_{x_0'\to-\infty} \delta(x_0')\langle p'| \int_{x_0'} A'^{(+)}(x)\, f_x^*\, d^3x |pq\rangle_{in} \end{matrix}\right. \qquad (5)$$

Der die δ -Funktionen enthaltende Limes (Randterm $z_1(\pm\infty)$)existiert und verschwindet ($x_0' \neq 0$) , falls der Limes des Matrixelementes nicht divergiert , was direkt aus der ASB nicht folgt ; man muß $\langle p'| \int_{x_0'} A'^{(-)}(x)\, f_x^*\, d^3x \,|\, pq\rangle_{in}$ erst durch Entwicklung von $A'^{(-)}(x)$ nach den $A'^{(+)(q)}(x_0)$ in zwei Summanden zerlegen auf die die ASB anwendbar ist und zeigt dann $z_1(\pm\infty) = 0$. Mit (5) und (3) ist

$${}_{out}\langle p'q'|pq\rangle_{in} = -i\langle p'| \int d^4x\, f_x^* \overleftrightarrow{\Box}_x \Theta(x) A^{(-)}(x)|pq\rangle_{in} \qquad (6)$$

eine weitere reduzierte Form des Matrixelementes . Zur Berechnung braucht man das interpolierende Feld und seine Ableitung nur für positive Zeiten , woraus z. B. folgt , daß Zusatzforderungen an die A(x) nur

für solche Zeiten gelten müssen , nicht für das gesamte Raum-Zeit-Gebiet . Der Vergleich von (4) mit (6) zeigt die Willkür des Verfahrens . Ziehen wir noch in (6) $\mathcal{K}_x$ durch die Θ -Funktion hindurch , wobei man sich vom Verschwinden einiger Randterme $z_1(\pm\infty)$ zu überzeugen hat , wird

$$\underset{out}{\langle p'q'|pq\rangle} = i\langle p'|\int d^4x\,\delta(x_0)\,f_x^*\overleftrightarrow{\partial}_{x_0}A^{(1)}(x)|pq\rangle_{in} - i\langle p'|\int d^4x\,f_x^*\,\Theta(x)\,\mathcal{K}_x A^{(1)}(x)|pq\rangle_{in} \quad . \tag{7}$$

Aus (7) folgt , daß die nicht invariante Ersetzung $A^{(1)}(x)\to A'^{(1)}(x)=\Theta(x-a)A^{(1)}(x)$ (4) und (6) als Spezialfall ($a\to\infty$ und $a=0$) enthält .

3. Reduziert man bis zu Einteilchenzuständen , müssen in der iterierten Form der ASB zwei Oberflächenintegrale mit (2) verwandelt werden . Da die Abspaltung einer 1 zweckmäßig ist , ersetzen wir zunächst entweder das hintere oder das vordere Oberflächenintegral nach (3) ("vorderes" Verfahren bzw. "hinteres" Verfahren) und deuten durch $\lim\limits_{---}\lim\limits_{---}$ an , daß man entweder $\lim\limits_{x_0'\to+\infty}\lim\limits_{y_0'\to-\infty}$ oder $\lim\limits_{y_0'\to-\infty}\lim\limits_{x_0'\to+\infty}$ nehmen kann

$$\underset{out}{\langle p'q'|pq\rangle} = \underset{in}{\langle p'q'|pq\rangle} + \lim_{---}\lim_{---}\left\{\begin{array}{l}\langle p'|\displaystyle\int_{-x_0'}^{+x_0'}d^3x\,f_x^*\,\mathcal{K}_x A^{(1)}(x)\int_{y_0'}A^{(2)}(y)\overleftrightarrow{\partial}_{y_0}f_y\,d^3y|p\rangle \\ \langle p'|\displaystyle\int_{x_0'}A^{(1)}(x)\overleftrightarrow{\partial}_{x_0}f_x^*\,d^3x\int_{-y_0'}^{+y_0'}dy_0\int d^3y\,f_y\,\mathcal{K}_y A^{(2)}(y)|p\rangle\end{array}\right. \tag{8a}$$

$$= 1 + \left\{\begin{array}{l} N_V(x_0'|y_0') \quad \text{bezw.} \quad N_V(y_0'|x_0') \\ N_h(x_0'|y_0') \quad \text{bezw.} \quad N_h(y_0'|x_0')\end{array}\right. . \tag{8b}$$

Zur Umformung des zweiten Oberflächenintegrals versucht man am einfachsten $A^{(1)}(x)$ bzw. $A^{(2)}(y)$ mit einer Sprungfunktion [2] abzuschneiden , wozu sich drei Methoden anbieten , die zu etwas verschiedenen Reduktionsverfahren führen .

$A^{(2)}(y)$ wird ersetzt durch

Verfahren A: $\Theta(a-y)A^{(2)}(y)$ (9)

Verfahren B: $\Theta(x-y)A^{(2)}(y)$, wobei $\mathcal{K}_x$ nicht auf $\Theta(x-y)$ wirkt (10)

Verfahren C: $\Theta(x-y)A^{(2)}(y)$, wobei $\mathcal{K}_x$ auf $\Theta(x-y)$ wirkt (11)

(9-11) gelten entsprechend für das hintere Verfahren (8b) und sind mit Axiom I-III (für a=0) offenbar verträglich . Ob das Konvergenzverhalten der abgeänderten Matrixelemente durch die Asymptotenbedingung IV festgelegt wird , die für abgeschnittene Felder keine unmittelbare Aussage liefert , ist gesondert zu untersuchen . Man muß für jedes Ersetzungsverfahren ein nicht triviales Theorem beweisen , das die Existenz der Limites und ihre Übereinstimmung mit der S-Matrix sichert , wozu die ASB wegen der pathologischen Struktur der Integrale nicht immer ausreicht . Im Folgenden wird dies für die ähnlichen Verfahren B und C durchgeführt , in denen die ursprünglich unabhängigen $\int dx_0 \int dy_0$ Integrationen durch Θ -Funktionen gekoppelt und im allgemeinen nicht mehr vertauschbar sind [17] . Verfahren A liefert zwar interessante aber in diesem Zusammenhang keine weiterführenden Ergebnisse und soll hier nicht näher beschrieben werden .

2.2 Verfahren B

1. Nach dem Schema des vorigen Abschnittes ist zu untersuchen[1] , wann der mit (10) abgeänderte Limes in (8) , für eine "vorn"-Reduktion also

$$N_V^B(x_0',y_0') = \langle p| \int_{-x_0'}^{+x_0'} dx_0 \int d^3x\, f_x^* \overrightarrow{H_x} A^{(0)}(x) \int_{y_0'} \Theta(x_0-y_0)\, A^{(2)}(y) \overleftrightarrow{\partial_{y_0}} f_y\, d^3y\, |p\rangle \quad , \tag{12}$$

$$\lim_{\substack{y_0'\to-\infty \\ x_0'\to+\infty}} \lim_{\substack{x_0'\to+\infty \\ y_0'\to-\infty}} N_V^B(x_0',y_0') = N_V^B\begin{pmatrix} y_0'|x_0' \\ x_0'|y_0' \end{pmatrix} \tag{12'}$$

existiert und mit der S-Matrix zusammenhängt . Die Integrale in (12) sind sinnvoll für $y_0' < x_0'$, die Limites also unter dieser Nebenbedingung zu bilden ; beispielsweise rechnet man in $N_V^B(x_0',y_0')$ zunächst für $y_0' < x_0'$ das Integral aus , bildet bei festem $y_0' < x_0'$ den y_0' -Limes und danach den x_0' -Limes . Zur Auswertung trennt man die dx_0 -Integration ab , führt zur Abkürzung die Ströme

---

1) Zu einfacheren Verfahren , für die stärkere Voraussetzungen nötig sind , siehe S. 31 , Absatz 8b .

$j^{(i)}(x)$ ein

$$K_x A^{(i)}(x) = (\Box_x - m_i^2) A^{(i)}(x) = j^{(i)}(x) \quad ,$$

$$N_V^B(x_0', y_0') = \underbrace{-i \langle p' | \int_{-x_0'}^{+x_0'} dx_0 \, \Theta(x_0 - y_0') \int d^3x \, f_x^* j^{(i)}(x) A^{(2)(q)}(y_0') | p \rangle}_{= A_V^B(x_0', y_0')} + \underbrace{\langle p' | \int_{-x_0'}^{+x_0'} dx_0 \, \delta(x_0 - y_0') \int d^3x \, f_x^* j^{(i)}(x) \int_{y_0'} A^{(2)}(y) f_y \, d^3y \, | p \rangle}_{= B_V^B(x_0', y_0')} \quad (13)$$

und führt die Limites in A , B suxessive aus. Der $y|x$ -Limes gibt[1]

$$\begin{aligned} \lim_{y_0' \to -\infty} \lim_{x_0' \to +\infty} A_V^B(x_0', y_0') &= -i \lim_{y_0' \to -\infty} \lim_{x_0' \to +\infty} \langle p' | \int_{y_0'}^{x_0'} dx_0 \int d^3x \, f_x^* j^{(i)}(x) A^{(2)(q)}(y_0') | p \rangle \\ &= \lim_{y_0' \to -\infty} \lim_{x_0' \to +\infty} \langle p' | A^{(i)\,+(p')}(x_0') A^{(2)(q)}(y_0') | p \rangle - \lim_{y_0' \to -\infty} \langle p' | A^{(i)\,+(p')}(y_0') A^{(2)(q)}(y_0') | p \rangle \quad (14) \\ &= \underset{out}{\langle p'q' | pq \rangle} - \underset{in}{} \lim_{y_0' \to -\infty} N_1(y_0', y_0') \quad , \end{aligned}$$

und der $x|y$ - Limes

$$\begin{aligned} \lim_{x_0' \to +\infty} \lim_{y_0' \to -\infty} A_V^B(x_0', y_0') &= -i \lim_{x_0' \to +\infty} \lim_{y_0' \to -\infty} \langle p' | \int_{-x_0'}^{+x_0'} dx_0 \int d^3x \, f_x^* j^{(i)}(x) A^{(2)(q)}(y_0') | p \rangle \\ &= \lim_{x_0' \to +\infty} \lim_{y_0' \to -\infty} \langle p' | A^{(i)\,+(p')}(x_0') A^{(2)(q)}(y_0') | p \rangle - \lim_{x_0' \to -\infty} \lim_{y_0' \to -\infty} \langle p' | A^{(i)\,+(p')}(x_0') A^{(2)(q)}(y_0') | p \rangle \quad (15) \\ &= \underset{out}{\langle p'q' | pq \rangle} - \underset{in}{\langle p'q' | pq \rangle} \quad . \end{aligned}$$

(14) und (15) sind verschiedene Resultate . Der Limes (15) existiert , während nach den Bemerkungen in 1.32 die Existenz des gleichzeitigen Limes (14) eine Zusatzforderung zur ASB ist , die für L-Invariante kausale Theorien mit Wechselwirkung nicht stets erfüllt werden kann .

---

1) Man beachtet

$$\int_{-x_0'}^{+x_0'} dx_0 \, \Theta(x_0 - y_0') F(x_0) = \Theta(x_0' - y_0') \left[\Theta(x_0' + y_0') \int_{y_0'}^{x_0'} dx_0 \, F(x_0) + \Theta(-x_0' - y_0') \int_{-x_0'}^{+x_0'} dx_0 \, F(x_0) \right] \quad .$$

Daraus folgt die Nichtvertauschbarkeit der iterierten Limites[1)]

(p , p' beliebig)

$$\lim_{y_0'\to-\infty}\lim_{x_0'\to+\infty}\langle p'|\int_{-x_0'}^{+x_0'}dx_0\Theta(x_0-y_0')\int d^3x\, f_x^*\, j^{(1)}(x)\, A^{(2)(q)}(y_0')|p\rangle \neq \lim_{x_0'\to+\infty}\lim_{y_0'\to-\infty}\langle p'|\int_{-x_0'}^{+x_0'}dx_0\Theta(x_0-y_0')\int d^3x\, f_x^*\, j^{(1)}(x)\, A^{(2)(q)}(y_0')|p\rangle \quad (16)$$

In den B_v^B treten ebenfalls gleichzeitige Limites (Randterme) auf[2)]

$$\lim_{y_0'\to-\infty}\lim_{x_0'\to+\infty} B_v^B(x_0',y_0') = \lim_{y_0'\to-\infty}\langle p'|\int d^3x\, f_x^*\, j^{(1)}(x)\int A^{(2)}(y)\, f_y\, d^3y\Big|_{x_0=y_0=y_0'}|p\rangle \quad (17)$$

$$\lim_{x_0'\to+\infty}\lim_{y_0'\to-\infty} B_v^B(x_0',y_0') = 0 \quad (18)$$

die sich in solche des Typs M_1 umformen lassen, wobei neben den $A^{(i)(q)}$ auch $\dot{A}^{(i)(q)}$ auftreten. Günstigerweise heben sich die B_v^B später weg, so daß Existenzforderungen für (17) überflüssig sind. Rechnet man analog $\lim_{x_0'\to+\infty}\lim_{y_0'\to+\infty} N_v^B(x_0',y_0')$ aus, ist die Nebenbedingung $y_0'<x_0'$, der x | y-Limes folgt wie in (13) und (14), während der y | x-Limes nach Definition der Θ-Funktion verschwindet

$$\lim_{y_0'\to+\infty}\lim_{x_0'\to+\infty}\lim_{x_0'\to+\infty}\lim_{y_0'\to+\infty} A_v^B(x_0',y_0') = \begin{cases} {}_{out}\langle p'q'|pq\rangle_{out} - \lim_{y_0'\to+\infty} N_1(y_0',y_0') \\ 0 \end{cases} \quad (19)$$

$$\lim_{y_0'\to+\infty}\lim_{x_0'\to+\infty}\lim_{x_0'\to+\infty}\lim_{y_0'\to+\infty} B_v^B(x_0',y_0') = \begin{cases} \lim_{y_0'\to+\infty}\langle p'|\int d^3x\, f_x^*\, j^{(1)}(x)\int A^{(2)}(y)\, f_y\, d^3y\Big|_{x_0=y_0=y_0'}|p\rangle \\ 0 \end{cases} \quad (20)$$

---

1) Da die nach (10) abgeschnittenen Felder keine ASB im Sinne von IV zu erfüllen brauchen, ist das Auftreten von Schwierigkeiten verständlich.

2) In Ausdrücken des Typs $\lim\lim\int_{-x_0'}^{+x_0'}dx_0\,\delta(x_0-y_0')F(x_0)\cdot g(y_0')$ liefert das Integral formal $\int_{-x_0'}^{+x_0'}dx_0\,\delta(x_0-y_0')F(x_0) = \Theta(y_0'+x_0')\Theta(x_0'-y_0')\,F(y_0')$, es verschwindet für $y_0'<-x_0'$ also nach Definition von δ, wenn es ein Intervall $-x_0'<x_0<+x_0'$ gibt, in dem F nicht singulär wird, was wegen der Existenz von S der Fall ist. Der y_0'-Limes verschwindet, weil nach (5) $g(y_0')$ im Limes sinnvoll ist.

2. Zur Anwendung des Greenschen Satzes auf das Oberflächenintegral $\int_{+y_i} dy_0$ braucht man einen (12) analogen Ausdruck mit $\int_{-y_i} dy_0$, also

$$N_V^B(x_0'-y_0') = \langle p'| \int_{-x_0'}^{+x_0'} dx_0 \int d^3x\, f_x^* \overrightarrow{\Box_x A^{(1)}(x)} \int_{-y_0'} \Theta(x_0-y_0)\, A^{(2)}(y) \overleftrightarrow{\partial_{y_0}} f_y\, d^3y\, |p\rangle \quad , \tag{21}$$

mit

$$\lim_{\substack{y_0'\to-\infty \\ x_0'\to+\infty}} \lim_{\substack{x_0'\to+\infty \\ y_0'\to-\infty}} N_V^B(x_0'-y_0') = \lim_{\substack{y_0'\to+\infty \\ x_0'\to+\infty}} \lim_{\substack{x_0'\to+\infty \\ y_0'\to+\infty}} N_V^B(x_0',y_0') \quad . \tag{22}$$

Die Differenz der Oberflächenintegrale (12) und (21) gibt

$$N_V^B(x_0',y_0') - N_V^B(x_0',-y_0') = \hat{N}_V^B(x_0',y_0') = \langle p'| \int_{-x_0'}^{+x_0'} dx_0 \int d^3x \int_{-y_0'}^{+y_0'} dy_0 \int d^3y\, f_x^* f_y\, f^{(1)}(x)\, \Box_y \Theta(x-y)\, A^{(2)}(y)\, |p\rangle \quad ,$$

und nach (14) , (15) , (17-20) , (22)

$$\left.\begin{matrix} \lim_{y_0'\to+\infty} \lim_{x_0'\to+\infty} \\ \lim_{x_0'\to+\infty} \lim_{y_0'\to+\infty} \end{matrix}\right\} \hat{N}_V^B(x_0',y_0') = \begin{cases} -\underset{out}{\langle p'q'|pq\rangle} + \underset{in}{\langle p'q'|pq\rangle} + \underset{out}{\underset{out}{M_2(A^{(1)}A^{(2)})}} & (23a) \\ -\underset{out}{\langle p'q'|pq\rangle} + \underset{in}{\langle p'q'|pq\rangle} + \underset{in}{0} & (23b) \end{cases} ,$$

mit

$$M_2(A^{(1)}A^{(2)}) = -\left(\lim_{y_0'\to+\infty} - \lim_{y_0'\to-\infty}\right)\left[\langle p'|A^{(1)*}q^{(1)}(y_0')\, A^{(2)(q)}(y_0')|p\rangle + \langle p'|\int f_x^* f^{(1)}(x) d^3x \int A^{(2)}(y) f_y\, d^3y \Big|_{x_0=y_0=y_0'} |p\rangle\right] , \tag{24}$$

d.h. schließlich

$$\underset{out}{\langle p'q'|pq\rangle}_{in} - \underset{in}{\langle p'q'|pq\rangle}_{in} = \begin{cases} \lim_{y_0'\to+\infty} \lim_{x_0'\to+\infty} \\ \lim_{x_0'\to+\infty} \lim_{y_0'\to+\infty} \end{cases} -\langle p'| \int_{-x_0'}^{+x_0'} dx_0 \int d^3x \int_{-y_0'}^{+y_0'} dy_0 \int d^3y\, f_x^* f_y\, f^{(1)}(x)\, \Box_y \Theta(x-y)\, A^{(2)}(y)|p\rangle \quad \begin{matrix} + M_2(A^{(1)}A^{(2)}) & (25a) \\ + 0 & (25b) \end{matrix}$$

Zur Beseitigung der Randterme B_V^B spaltet man auf der linken Seite von (24) durch Vertauschen des $\Box_y$ Operators mit $\Theta(x-y)$ zwei Summanden ab , die die B_V^B kompensieren

$$\underset{out}{\langle p'q'|pq\rangle}_{in} - \underset{in}{\langle p'q'|pq\rangle}_{in} = \begin{cases} -\left(\lim_{y_0'\to+\infty} - \lim_{y_0'\to-\infty}\right)\langle p'|A^{(1)*}q^{(1)}(y_0')\, A^{(2)(q)}(y_0')|p\rangle + \\ 0 + \end{cases}$$

$$+ \left.\begin{matrix} \lim_{y_0'\to+\infty} \lim_{x_0'\to+\infty} \\ \lim_{x_0'\to+\infty} \lim_{y_0'\to+\infty} \end{matrix}\right\} -\langle p'| \int_{-x_0'}^{+x_0'} dx_0 \int d^3x \int_{-y_0'}^{+y_0'} dy_0 \int d^3y\, f_x^* f_y\, \Theta(x-y)\, f^{(1)}(x) f^{(2)}(y)|p\rangle + \langle p'| \int_{-x_0'}^{+x_0'} dx_0 \int d^3x\, f_x^* f^{(1)}(x) \int_{-y_0'}^{+y_0'} dy_0\, \delta(x_0-y_0) \int d^3y\, A^{(2)}(y) \overleftrightarrow{\partial_{y_0}} f_y\, |p\rangle$$

Diskutieren wir das Ergebnis (verkürzte Reduktionsformel)

1. Aus der Existenz der S-Matrix folgt die des $x \mid y$-Limes (25b , d) , der zur Berechnung der Integrale geeignet ist . In (24b) fallen Randterme B_v^β auch ohne Vertauschung des H_{T_y} -Operators mit $\Theta(x-y)$ weg , wobei weder die Reihenfolge der Limites noch die der Integrale vertauscht werden darf . (25b , d) folgten allein aus der ASB ohne L-Invarianz und Kausalität .

2. Im Gegensatz dazu ist für den $y \mid x$-Limes eine Zusatzforderung nötig ,

$$\left(\lim_{y_0' \to +\infty} - \lim_{y_0' \to -\infty}\right) \langle p' | A^{(1)*(q')}(y_0') A^{(2)(q)}(y_0') | p \rangle = 0 \qquad (26)$$

die , da nur die Existenz einer Limesdifferenz gefordert wird , mit L-Invarianz und Kausalität verträglich ist , trotzdem die einzelnen Limites nicht immer existieren . Eine Konsistenzuntersuchung von (26) haben wir in 1.32 durchgeführt und gezeigt , daß als Zusatzforderung bereits Translationsinvarianz ausreicht . Wenn H_{T_y} nicht mit Θ vertauscht wird , braucht man etwas schärfer neben (26) noch

$$M_2(A^{(1)}A^{(2)}) = 0 , \text{ also } \left(\lim_{y_0' \to +\infty} - \lim_{y_0' \to -\infty}\right) \langle p' | \int d^3x\, f_x^* j^{(1)}(x) \int d^3y\, f_y A^{(2)}(y) \Big|_{x_0 = y_0 = y_0'} | p' \rangle = 0 , \qquad (26')$$

was in der Struktur mit (26) übereinstimmt .

3. Die Reihenfolge der Integrationen ist durch das Verfahren festgelegt .

4. Von der FOCK-Darstellung wurde kein Gebrauch gemacht .

3. In (25) ist eine vollständige Reduktion des Matrixelementes in einer noch unzweckmäßigen weil unsymmetrischen Form erreicht . Die Kausalität ließe sich leichter berücksichtigen und (26) würde übersichtlicher sein , wenn statt der einfachen Operatorprodukte zeitgeordnete (T-) oder retardierte (R-) Produkte bzw. Kommutatoren im Integranden ständen . Mit der ASB allein sind solche Umformungen nicht möglich , denn ergänzt man formal das Integral rechts von (25) durch Addition zu einem R , T-Produkt , tritt auch links ein entsprechendes Matrixelement auf , das die Symmetrie wieder zerstört . Zur Beseitigung

dieses Störgliedes muß man weitere Eigenschaften des freien Feldes beachten und nach Aussagen suchen , wann das addierte in-out-Matrixelement zwischen beliebigen Zuständen aus nicht trivialen Gründen identisch Null wird .

Eine recht allgemeine Vorschrift zur Konstruktion solcher Ausdrücke liefert die Darstellungsbedingung der FOCK-Darstellung : Alle Matrixelemente , die sich ohne Rest so umformen lassen , daß ein Vernichtungsoperator auf das Vakuum wirkt , verschwinden und sind zur Addition geeignet ; Gleiches gilt für Linearkombinationen mit beliebigen L-invarianten Funktionen . Dieses auf die FOCK-Darstellung beschränkte (darstellungsabhängige) Verfahren führt aber nur dann zu R , T-Produkten , wenn das addierte Matrixelement durch Umordnen der ausreduzierten $A^{(i)}(x) \cdots A^{(j)}(y)$ entsteht , ist also nicht immer anwendbar und versagt , wenn z. B. zwei (vertauschbare) Erzeugungs- oder Vernichtungsoperatoren durch die ASB ersetzt werden . In solchen Fällen macht eine weitere Ausreduktion die Symmetrisierung im allgemeinen möglich [4] .

Neben der FOCK-Darstellung kann noch die Spektralbedingung zusammen mit Superauswahlregeln zum Aufsuchen passender Matrixelemente dienen , etwa bei Ausdrücken des Typs $\langle p'|pq\rangle_{in}$ [17] . Wegen der Unabhängigkeit von der Darstellung wäre dieses Verfahren eigentlich geeigneter , es hat jedoch den entscheidenden Nachteil , daß die erhaltenen Matrixelemente nur für manche $p',q',\cdots ; p,q,\cdots$ Null werden . Ob sich universelle Reduktionsformeln mit R , T-Produkten in zu FOCK inäquivalenten Darstellungen herleiten lassen , ist fraglich , zumal bisher kein brauchbarer physikalischer Überblick über die möglichen inäquivalenten Darstellungen existiert [3] .

Im Folgenden wird das darstellungsabhängige Verfahren benutzt . Man wählt das einfachste verschwindende Matrixelement als Subtraktionsterm

$$\langle p'| A^{(2)(q)}_{\substack{in\\out}} A^{(1)\dagger(q')}_{\substack{out\\in}} |p\rangle = \langle 0| A^{(3)\dagger(p')}_{\substack{in\\out}} A^{(2)(q)}_{\substack{in\\out}} A^{(1)\dagger(q')}_{\substack{out\\in}} A^{(4)(p)}_{\substack{out\\in}} |0\rangle = 0 \qquad \text{falls } A^{(1)} \neq A^{(4)} \text{ und (oder) } A^{(2)} \neq A^{(3)} \qquad (27)$$

p',q',p,q beliebig .

und ersetzt speziell (jede invariante Funktion ist brauchbar)

$$A^{(2)}(y) \to A^{(2)}(y) = F(x-y)A^{(2)}(y) \;;\; F(x-y) = \{\theta(x-y), -\theta(y-x)\} \;;\; \mathcal{H}_x \text{ wirkt nicht auf } F\,, \tag{28}$$

so liefert eine längere Rechnung über analoge Ausdrücke wie oben[1]

$$0 = \left.\begin{matrix} \lim\limits_{y_0'\to+\infty} & \lim\limits_{x_0'\to+\infty} \\ \lim\limits_{x_0'\to+\infty} & \lim\limits_{y_0'\to+\infty} \end{matrix}\right\} -\langle p'| \int_{-x_0'}^{+x_0'} dx_0 \int d^3x \int_{-y_0'}^{+y_0'} dy_0 \int d^3y \; f_x^* f_y \, \mathcal{H}_y F(x-y) j^{(1)}(x) A^{(2)}(y) |p\rangle \quad + H_2(A^{(2)}A^{(1)}) \tag{28a}$$

$$+ \; 0 \tag{28b}$$

und wenn $\mathcal{H}_y$ mit F vertauscht wird,

$$0 = \left\{ -\left(\lim_{y_0'\to+\infty} - \lim_{y_0'\to-\infty}\right)\langle p'|A^{(2)(q)}(y_0') A^{(1)\dagger(q')}(y_0')|p\rangle \; + \right. \tag{29a}$$

$$\left. 0 \; + \right. \tag{29b}$$

$$+ \left.\begin{matrix} \lim\limits_{y_0'\to+\infty} & \lim\limits_{x_0'\to+\infty} \\ \lim\limits_{x_0'\to+\infty} & \lim\limits_{y_0'\to+\infty} \end{matrix}\right\} -\langle p'| \int_{-x_0'}^{+x_0'} dx_0 \int d^3x \int_{-y_0'}^{+y_0'} dy_0 \int d^3y \, f_x^* f_y \, F(x-y) j^{(2)}(y) j^{(1)}(x) |p\rangle + \langle p'| \int_{-x_0'}^{+x_0'} dx_0 \int d^3x \int_{-y_0'}^{+y_0'} dy_0 \, \delta(x_0-y_0) A^{(2)}(y) \overleftrightarrow{\partial}_{y_0} f_y j^{(1)}(x) |p\rangle$$

4. Mit den Relationen (29) lassen sich in (25) die Integrale zu T- bzw. R-Produkten ergänzen. Man erhält mit

$$T(j^{(1)}(x) j^{(2)}(y)) = \theta(x-y) j^{(1)}(x) j^{(2)}(y) + \theta(y-x) j^{(2)}(y) j^{(1)}(x) \tag{30}$$

$$R(j^{(1)}(x) j^{(2)}(y)) = \theta(x-y) j^{(1)}(x) j^{(2)}(y) - \theta(x-y) j^{(2)}(y) j^{(1)}(x) = \theta(x-y) \underline{[j^{(1)}(x) j^{(2)}(y)]} \tag{31}$$

für das bis zu Einteilchenzuständen ausreduzierte Matrixelement, wobei im letzten Summanden entweder R oder T einzusetzen ist,

$$\underset{out\ \ in}{\langle pq'|pq\rangle} - \underset{in\ \ out}{\langle p'q'|pq\rangle} = \underset{in\ \ in}{\underset{out\ \ out}{\langle pq'|pq\rangle}} = \left.\begin{matrix} \lim\limits_{y_0'\to+\infty} & \lim\limits_{x_0'\to+\infty} \\ \lim\limits_{x_0'\to+\infty} & \lim\limits_{y_0'\to+\infty} \end{matrix}\right\} -\langle p'| \int_{-x_0'}^{+x_0'} dx_0 \int d^3x \int_{-y_0'}^{+y_0'} dy_0 \int d^3y \, f_x^* f_y \, \mathcal{H}_y \, \frac{R}{T} (j^{(1)}(x) A^{(2)}(y)) |p\rangle \quad + H_2([\underline{A^{(1)}A^{(2)}}]) \tag{32a}$$

$$+ \; 0 \tag{32b}$$

---

1) Da für $F = 1$ die Rechnung trivial ist, genügt es (29), wegen $\theta(-x) = 1 - \theta(x)$ für $\theta(x)$ zu berechnen. Erweiterte Ersetzungsverfahren, die von komplizierteren verschwindenden Matrixelementen und beliebigen invarianten F ausgehen, wurden für konkrete Rechnungen bisher nicht benutzt.

und , ($\mathbb{K}_y$ in R bzw. T hineingezogen)

$$\langle p'q'|pq\rangle_{\substack{out\\ in}} - \langle p'q'|pq\rangle_{\substack{out\\ in}} = \begin{cases} -(\lim_{y_0'\to+\infty} - \lim_{y_0'\to-\infty})\langle p'|[A^{(1)\,\sharp(q')}(y_0')A^{(2)(q)}(y_0')]|p\rangle + & (32c)\\ 0 + & (32d)\end{cases}$$

$$+ \begin{Bmatrix} \lim_{y_0'\to+\infty}\lim_{x_0'\to+\infty} \\ \lim_{x_0'\to+\infty}\lim_{y_0'\to+\infty}\end{Bmatrix} -\langle p'|\int_{-x_0'}^{+x_0'}dx_0\int d^3x\int_{-y_0'}^{+y_0'}dy_0\int d^3y\, f_x^* f_y \underset{T}{R}(j^{(1)}(x)j^{(2)}(y))|p\rangle + \langle p'|\int_{-x_0'}^{+x_0'}dx_0\int d^3x\int_{-y_0'}^{+y_0'}dy_0\int d^3y\, f_x^*\delta(x_0-y_0)[j^{(1)}(x)A^{(2)}(y)]\overleftrightarrow{\partial_{y_0}} f_y|p\rangle .$$

Die symmetrischen Reduktionsverfahren (32) sind also entweder mit der Regel : die Limesreihenfolge muß mit der durch das Verfahren festgelegten Integrationsreihenfolge übereinstimmen , zu versehen , oder mit der (26) , 26') entsprechenden Zusatzforderung eines gleichzeitigen Limes , der mit Axiom I-III beweisbar ist

$$(\lim_{y_0'\to+\infty} - \lim_{y_0'\to-\infty})\langle p'|[A^{(1)\,\sharp(q')}(y_0')A^{(2)(q)}(y_0')]|p\rangle = 0 \quad , \tag{33}$$

$$M_2([A^{(1)}A^{(2)}]) = 0 \quad \text{bzw.} \quad (\lim_{y_0'\to+\infty} - \lim_{y_0'\to-\infty})\langle p'|\int d^3x\int d^3y\, f_x^* f_y [j^{(1)}(x)A^{(2)}(y)]\Big|_{x_0=y_0=y_0'}|p\rangle = 0 . \tag{33'}$$

Nach dem gleichen Schema wie oben liefert die hintere Reduktion ausgehend von

$$N_h^B(x_0'y_0') = \langle p'|\int_{-y_0'}^{+y_0'}dy_0\int d^3y\,\underbrace{\Theta(x_0-y_0)A^{(1)}(x)\partial_{x_0}f_x^*d^3x\cdot f_y\overrightarrow{\mathbb{K}_y}A^{(2)}(y)}_{\pm x_0}|p\rangle \tag{34}$$

die Reduktionsformeln

$$\langle p'q'|pq\rangle_{\substack{out\\ in}} - \langle p'q'|pq\rangle_{\substack{out\\ in}} = \begin{Bmatrix} \lim_{y_0'\to+\infty}\lim_{x_0'\to+\infty} \\ \lim_{x_0'\to+\infty} - \lim_{y_0'\to+\infty}\end{Bmatrix} -\langle p'|\int_{-y_0'}^{+y_0'}dy_0\int d^3y\int_{-x_0'}^{+x_0'}dx_0\int d^3x\, f_x^* f_y \mathbb{H}_x\Theta(x-y)A^{(1)}(x)j^{(2)}(y)|p\rangle \quad \begin{matrix} +0 & (35a)\\ +M_3(A^{(1)}A^{(2)}) & (35b)\end{matrix}$$

mit

$$M_3(A^{(1)}A^{(2)}) = +(\lim_{x_0'\to+\infty} - \lim_{x_0'\to-\infty})\Big[\langle p'|A^{(1)\,\sharp(q')}(x_0')A^{(2)(q)}(x_0')|p\rangle + \langle p'|\int f_x^* A^{(1)}(x)d^3x\int f_y j^{(2)}(y)d^3y\Big|_{x_0=y_0=x_0'}|p\rangle\Big]$$

und ($\mathbb{K}_x$ mit $\ominus$ vertauscht)

$$\langle p'q'|pq\rangle_{out\ in} - \langle p'q'|pq\rangle_{in\ out} = \{\ 0 \quad + \tag{35c}$$

$$-(\lim_{y_0'\to+\infty} - \lim_{y_0'\to-\infty})\langle p'|A^{(1)*(q')}(y_0')\,A^{(2)(q')}(y_0')|p\rangle + \tag{35d}$$

$$+ \lim_{y_0'\to+\infty}\lim_{x_0'\to+\infty} + \lim_{x_0'\to+\infty}\lim_{y_0'\to+\infty} \}\ -\langle p'|\int_{-y_0'}^{+y_0'}dy_0\int d^3y\int_{-x_0'}^{+x_0'}dx_0\int d^3x\ f_x^*f_y\,\Theta(x_0-y_0)\,f^{(1)}(x)f^{(2)}(y)|p\rangle + \langle p'|\int_{-y_0'}^{+y_0'}dy_0\int d^3y\int_{-x_0'}^{+x_0'}dx_0\,\delta(x_0-y_0)\int d^3x\,A^{(1)}(x)\overleftrightarrow{\partial_{x_0}}f_x^*\cdot f_y f^{(2)}(y)|p\rangle$$

Ohne Zusatzforderung existiert hier der $y|x$-Limes , der für die im Vergleich zu (25) vertauschte Integrationsreihenfolge auch vernünftig ist . Die Vertauschbarkeit der Integrationsreihenfolgen folgt wegen der Verschiedenheit der Integranden aus (25) und (35) nicht . Man erhält nur eine später benutzte Beziehung (Integral im $x|y$-Limes) .

$$\langle p'|\int_{-x_0'}^{+x_0'}dx_0\int d^3x\int_{-y_0'}^{+y_0'}dy_0\int d^3y\ f_x^*f_y f^{(1)}(x)\,HT_y\,\Theta(x-y)A^{(2)}(y)|p\rangle = \langle p'|\int_{-x_0'}^{+x_0'}dx_0\int d^3x\int_{-y_0'}^{+y_0'}dy_0\int d^3y\ f_x^*f_y\,HT_y\,\Theta(x-y)\,A^{(1)}(y)\,f^{(2)}(x)|p\rangle \tag{36}$$

Der Übergang zu R , T-Produkten läuft wie im vorderen Verfahren ab .

7. Eine rechentechnisch zweckmäßige Abänderung der Ersetzungsvorschrift

$$A^{(i)}(x) \longrightarrow A'^{(i)}(x) = \Theta(y-x)\,A^{(i)}(x) \tag{37}$$

liefert die S-Matrix in einer etwas anderen Form $\langle p'q'|pq\rangle_{in\ out}$ statt $\langle p'q'|pq\rangle_{out\ in}$. Man sieht dies leicht über die aus der ASB zugänglichen Beziehung

$$\langle p'|\int d^4x\,f_x^*f^{(1)}(x)\int d^4y\,f_y f^{(2)}(y)|p\rangle = -\langle p'q'|pq\rangle_{out\ in} - \langle p'q'|pq\rangle_{in\ out} + \langle p'q'|pq\rangle_{out\ out} + \langle p'q'|pq\rangle_{in\ in} \tag{38}$$

ein , etwa in (25b)

$$\langle p'q'|pq\rangle_{in\ out} - \langle p'q'|pq\rangle_{in\ in} = \lim_{x_0'\to+\infty}\lim_{y_0'\to+\infty}\langle p'|\int_{-x_0'}^{+x_0'}dx_0\int d^3x\int_{-y_0'}^{+y_0'}dy_0\int d^3y\ f_x^*f_y f^{(1)}(x)\,HT_y\,\Theta(y-x)\,A^{(2)}(y)|p\rangle \ . \tag{39}$$

In den Randtermen und den bei Umformung entstehenden Oberflächenintegralen treten Vorzeichenwechsel auf .

8. Schließen wir noch einige Bemerkungen an .

a. Schwierigkeiten durch den Distributionscharakter der Matrixelemente sollten nicht auftreten . Durch das Rechenverfahren wird das Produkt der Θ mit dem Darstellungsfunktional implizit definiert , alle Größen mit Distributionscharakter kommen nur unter Integralen vor ,

und werden existieren .

b. Setzt man von vornherein Translationsinvarianz voraus und schiebt nach dem ersten Reduktionsschritt (in (8)) die Operatoren auf 0 zurück [18] (Abspaltung des Energieimpulssatzes) , treten Randtermschwierigkeiten in einer abgemilderten Form auf und müssen entsprechend diskutiert werden . Allerdings entstehen keine gleichzeitigen Limites mehr , in Übereinstimmung mit dem Resultat , daß Translationsinvarianz zu ihrer Beseitigung ausreicht . Mit der Abspaltung des Energieimpulssatzes vor der Reduktion erhält man automatisch Reduktionsformeln des Verfahrens B , also den Typ $\mathbb{K}\,\Theta\,\mathbb{K}$ und $\Theta\,\mathbb{K}_x\,\mathbb{K}_y$ + Oberflächenintegral .

2.3 Verfahren C

1. Für die Reduktion mit der Ersetzungsvorschrift (10c)

$$A^{(2)}(x) \longrightarrow A'^{(2)}(x) = \Theta(x-y)\, A^{(2)}(x) \quad , \text{ wobei } \mathbb{K}_x \text{ auf } \Theta \text{ wirkt} , \qquad (10c)$$

ist wie in Abschnitt 2.2 zu zeigen ("vorderes" Verfahren) , daß der Grenzwert von

$$N_V^c(x_0', y_0') = \langle p' | \int_{-x_0'}^{+x_0'} dx_0 \int d^3x\, f_x^* \overrightarrow{\mathbb{K}_x} A^{\prime\prime}(x) \int_{y_0'} \Theta(x_0 - y_0)\, A^{\prime\prime}(y) \overleftrightarrow{\partial_{y_0}} f_y\, d^3y\, | p \rangle \quad , \qquad (40)$$

also

$$\lim_{\substack{y_0' \to -\infty \\ x_0' \to +\infty}} \lim_{\substack{x_0' \to +\infty \\ y_0' \to -\infty}} N_V^c(x_0', y_0') = N_V^c \begin{pmatrix} y_0' | x_0' \\ x_0' | y_0' \end{pmatrix} \quad , \qquad (41)$$

mit der S-Matrix zusammenhängt . Für x_0', y_0' gilt die Nebenbedingung $y_0' < x_0'$ und $\partial_{x_0}^2 \partial_{y_0}$ als Differentiationsreihenfolge von $\partial_{x_0}^2$ und ∂_{y_0} . In (40) läßt sich die ASB nach Auflösung von $\overleftrightarrow{\partial_{y_0}}$ leicht zur Limesberechnung anwenden

$$N_V^c(x_0',y_0') = \underbrace{-i\langle p'|\int_{-x_0'}^{+x_0'} dx_0 \int d^3x\, f_x^* \overrightarrow{H_x} A^{(1)}(x)\,\Theta(x_0-y_0')\,A^{(2)(q)}(y_0')|p\rangle}_{=A_V^c(x_0',y_0')} + \underbrace{\langle p'|\int_{-x_0'}^{+x_0'} dx_0 \int d^3x\, f_x^* H_x A^{(1)}(x)\,\delta(x_0-y_0') \int_{y_0'} A^{(2)}(y)\, f_y\, d^3y\,|p\rangle}_{=B_V^c(x_0',y_0')} \quad . \tag{42}$$

Zur Umformung in ein Oberflächenintegral ist allerdings der Ansatz

$$N_V'^c(x_0',y_0') = \langle p'|\int_{-x_0'}^{+x_0'} dx_0 \int d^3x\, f_x^* \int_{y_0'} \overrightarrow{H_x} A^{(1)}(x)\,\Theta(x_0-y_0)\,A^{(2)}(y) \overleftrightarrow{\partial_{y_0}} f_y\, d^3y\,|p\rangle \tag{40'}$$

geeigneter , in dem H_x mit $\int_{y_0'} d^3y$ vertauscht ist und der mit der Differentiationsreihenfolge $\partial_{x_0}^2\partial_{y_0}$ bei der Limesberechnung das Gleiche wie N_V^c liefert (man führe in (40) und (40') alle $\partial_{x_0}^2\partial_{y_0}$ -Differentiationen aus und vergleiche die Ergebnisse) , d. h. $\lim\limits_{---}\lim\limits_{---} N_V^c = \lim\limits_{---}\lim\limits_{---} N_V'^c$.

Benutzt man im ersten Summanden von (42) den Greenschen Satz

$$A_V^c(x_0',y_0') = -i\langle p'|\Big(\int_{+x_0'}^{} d^3x - \int_{-x_0'}^{} d^3x\Big)\,\Theta(x_0-y_0')\,A^{(1)}(x) \overleftrightarrow{\partial_{x_0}} f_x^*\, A^{(2)(q)}(y_0')|p\rangle \quad ,$$

bzw.

$$A_V^c(x_0',y_0') = \Theta(x_0'-y_0')\langle p'|A^{(1)*(q')}(x_0')\,A^{(2)(q)}(y_0')|p\rangle - \Theta(-x_0'-y_0')\langle p'|A^{(1)*(q')}(-x_0')\,A^{(2)(q)}(y_0')|p\rangle +$$

$$+ i\,\delta(x_0'-y_0')\langle p'|\int_{x_0'} A^{(1)}(x)\, f_x^* d^3x\, A^{(2)(q)}(y_0')|p\rangle - i\,\delta(-x_0'-y_0')\langle p'|\int_{-x_0'} A^{(1)}(x)\, f_x^* d^3x\, A^{(2)(q)}(y_0')|p\rangle \quad ,$$

folgt für (40) und (40')

	$y_0'\|x_0'$: $-\infty\|+\infty$	$y_0'\|x_0'$: $+\infty\|+\infty$	$x_0'\|y_0'$: $+\infty\|-\infty$	$x_0'\|y_0'$: $+\infty\|+\infty$
$\lim\limits_{---}\lim\limits_{---} A_V^c(x_0',y_0') =$	$\underset{out\ \ in}{\langle p'q'\|pq\rangle} - 0$	$\underset{out\ \ out}{\langle p'q'\|pq\rangle} - 0$	$\underset{out\ \ in\ \ in\ \ in}{\langle p'q'\|pq\rangle - \langle p'q'\|pq\rangle}$	0

(43)

Die δ -Funktionsterme verschwinden nach Definition , da $\lim\limits_{---}\lim\limits_{---}\langle p'|\int_{x_0'} A^{(1)}(x)\, f_x^* d^3x\, A^{(2)(q')}(y_0')|p\rangle$ existiert (siehe die Bemerkungen bei (5)) . Aus den gleichen Gründen verschwinden die B_V^c für beide Iterationsreihenfolgen , wenn auf das x-Integral hinsichtlich $A^{(1)}(x)\delta(x_0-y_0')$ der Greensche Satz angewandt bzw. H_x mit $\delta(x_0-y_0')$ vertauscht wird .

$$B_V^c(x_0'y_0') = \langle p'|\Big(\int_{+x_0'}^{} d^3x - \int_{-x_0'}^{} d^3x\Big) A^{(1)}(x)\,\delta(x_0-y_0')\overleftrightarrow{\partial_{x_0}} f_x^* \int_{y_0'}^{} A^{(2)}(y) f_y\, d^3y\,|p\rangle$$

$$- i\,\delta(x_0-y_0')\langle p'|A^{(1)*}(p')(x_0)\int_{y_0'}^{} A^{(2)}(y) f_y\, d^3y\,|p\rangle\Big|_{-x_0'}^{+x_0'} - \delta'(x_0-y_0')\langle p'|\int_{y_0'}^{} A^{(1)}(x) f_x^* d^3x \int_{y_0'}^{} A^{(2)}(y) f_y\, d^3y\,|p\rangle\Big|_{-x_0'}^{+x_0'} ,$$

$$\lim_{---}\lim_{---} B_V^c(x_0'y_0') = 0 \qquad . \tag{44}$$

Im Gegensatz zum Verfahren B existieren die iterierten Limites ohne Zusatzforderung .

2. Um zu einem Volumenintegral zu kommen , bilden wir

$$\lim_{\substack{y_0'\to-\infty\\ x_0'\to+\infty}}\lim_{\substack{x_0'\to+\infty\\ y_0'\to-\infty}} N_V^c(x_0'-y_0') = \lim_{\substack{y_0'\to+\infty\\ x_0'\to+\infty}}\lim_{\substack{x_0'\to+\infty\\ y_0'\to+\infty}} N_V^c(x_0'y_0')$$

und benutzen den Greenschen Satz für $\Big(\int_{+y_0'} - \int_{-y_0'}\Big)\underline{\overrightarrow{H_x} A^{(1)}(x)\,\Theta(x_0-y_0')\,A^{(2)}(y)}\overleftarrow{\partial_{y_0}} f_y\, d^3y$ in (40) ($\overrightarrow{H_x} A^{(1)}(x)$ wirkt formal als Faktor , der erst angewendet werden darf , wenn $\overleftrightarrow{\partial_{y_0}}$ ausgeführt ist .

$$N_V^c(x_0'y_0') - N_V^c(x_0'-y_0') = \hat{N}_V^c(x_0'y_0') = \langle p'|\int_{-x_0'}^{+x_0'} dx_0 \int d^3x\, f_x^* \overrightarrow{H_x} A^{(1)}(x) \int_{-y_0'}^{+y_0'} dy_0 \int d^3y\, f_y\, H_y\, \Theta(x-y)\, A^{(2)}(y)\,|p\rangle \quad , \tag{45}$$

und in (40')

$$N_V'^c(x_0'y_0') - N_V'^c(x_0'-y_0') = \hat{N}_V'^c(x_0'y_0') = \langle p'|\int_{-x_0'}^{+x_0'} dx_0 \int d^3x \int_{-y_0'}^{+y_0'} dy_0 \int d^3y\, f_x^* f_y\, H_x\, H_y\, \Theta(x-y)\, A^{(1)}(x)\, A^{(2)}(y)\,|p\rangle \quad . \tag{45'}$$

Die Reihenfolge $H_x\, H_y$ folgt aus der oberen Festlegung der Differentiationsreihenfolgen zu $\partial_{x_0}^2 \partial_{y_0}$. (45) und (45') sind gleichwertige Formulierungen des Doppelintegrals . Ein Vergleich liefert die Vertauschbarkeit von $\partial_{x_0}^2$ mit $\int dy_0$.

Kombination von (45') mit (42) gibt eine aus der ASB folgende Reduktionsformel

$$\langle p'q'|pq\rangle_{\substack{out\\ in}} - \langle p'q'|pq\rangle_{\substack{out\\ in}} = \left.\begin{matrix}\lim\limits_{y_0'\to+\infty}\lim\limits_{x_0'\to+\infty}\\ \lim\limits_{x_0'\to+\infty}\lim\limits_{y_0'\to+\infty}\end{matrix}\right\} - \langle p'|\int_{-x_0'}^{+x_0'} dx_0 \int d^3x \int_{-y_0'}^{+y_0'} dy_0 \int d^3y\, f_x^* f_y\, H_x\, H_y\, \Theta(x-y)\, A^{(1)}(x)\, A^{(2)}(y)\,|p\rangle \quad . \tag{46a}$$

(46b)

Für spätere Rechnungen ist es zweckmäßig , $\mathcal{H}_y$ mit Θ zu vertauschen. Man erhält aus (45)

$$\hat{N}_\nu^c(x_0',y_0') = \langle p'| \int_{-x_0'}^{+x_0'} dx_0 \int d^3x \int_{-y_0'}^{+y_0'} dy_0 \int d^3y \, f_x^* f_y \overrightarrow{\mathcal{H}_x} \Theta(x-y) \mathcal{H}_y A^{(1)}(x) A^{(2)}(y) |p\rangle + i \langle p'| \int_{-x_0'}^{+x_0'} dx_0 \int d^3x \, f_x^* \int_{-y_0'}^{+y_0'} dy_0 \overrightarrow{\mathcal{H}_x} A^{(1)}(x) \delta(x_0-y_0) A^{(2)(q)}(y_0) |p\rangle +$$

$$+ \langle p'| \int_{-x_0'}^{+x_0'} dx_0 \int d^3x \, f_x^* \overrightarrow{\mathcal{H}_x} A^{(1)}(x) \delta(x_0-y_0) \int_{y_0'}^{} A^{(2)}(y) f_y \, d^3y \Big|_{-y_0'}^{+y_0'} |p\rangle \quad .$$

Das letzte Glied ist mit $\mathcal{B}_\nu^c$ identisch , fällt also wegen (44) weg . Das zweite Glied M_4 erfordert einige Mühe . Man zeigt zuerst , daß $\partial_{x_0}^2$ und ∂_{x_0} bzw. $\overrightarrow{\mathcal{H}_x} A^{(1)}(x)$ vor das dy_0 -Integral geschrieben werden darf , also unter $\int dx_0$ mit $\int dy_0$ vertauschbar ist . Dazu rechnet man (part. Integration usw.) folgende im Limes gültige Identität nach

$$\lim_{---} \lim_{---} \int_{-x_0'}^{+x_0'} dx_0 \, g(x_0) \partial_{x_0}^i \int_{-y_0'}^{+y_0'} dy_0 \, \delta(x_0-y_0) f(y_0) = \lim_{---} \lim_{---} \int_{-x_0'}^{+x_0'} dx_0 \, g(x_0) \int_{-y_0'}^{+y_0'} dy_0 \, \partial_{x_0}^i \delta(x_0-y_0) f(y_0) \quad , \quad i=1,2 \quad , \qquad (47)$$

wobei beachtet ist , daß die δ -Funktion nur von der Variablendifferenz abhängt . Zweckmäßig benutzt man zur Umformung die formale Relation

$$\int_{-y_0'}^{+y_0'} dy_0 \, \delta(x_0'-y_0) f(y_0) = \Theta(y_0'-x_0') \Theta(y_0'+x_0') f(x_0') \quad . \qquad (47')$$

Dann wird im x|y-Limes

$$M_4(A^{(1)}A^{(2)}) = - \lim_{x_0' \to +\infty} \lim_{y_0' \to +\infty} i \langle p'| \int_{-x_0'}^{+x_0'} dx_0 \int d^3x \, f_x^* \overrightarrow{\mathcal{H}_x} A^{(1)}(x) \int_{-y_0'}^{+y_0'} dy_0 \, \delta(x_0-y_0) A^{(2)(q)}(y_0) |p\rangle$$

und mit (47') und dem Greenschen Satz

$$M_4(A^{(1)}A^{(2)}) = \left(\lim_{x_0' \to +\infty} - \lim_{x_0' \to -\infty} \right) \left[\langle p'| A^{(1)*(q')}(x_0') A^{(2)(q)}(x_0') |p\rangle - i \langle p'| \int_{x_0'}^{} A^{(1)}(x) f_x^* d^3x \, \frac{\partial}{\partial x_0} A^{(2)(q)}(x_0) \Big|_{x_0=x_0'} |p\rangle \right] .$$

In dieser Form stimmt $M_4(A^{(1)}A^{(2)})$ mit den Randtermen des hinteren B-Verfahrens[1] (35) überein (im zweiten Summanden wird die Differentiation ausgeführt , $\ddot{f}$ als $(\partial_\nu\partial^\nu - m^2)$ geschrieben und die räumlichen Ableitungen partiell integriert)

$$\frac{\partial}{\partial x_0} A^{(2)(q)}(x_0) = i \int_{y_0=x_0} A^{(2)}(y) \overleftrightarrow{\partial_{y_0}^2} f_y \, d^3y = i \int_{y_0=x_0} f_y \mathcal{H}_y A^{(2)}(y) \, d^3y \quad ,$$

also

---

1) Im Verfahren B stammten die gleichzeitigen Limites aus den $\mathcal{B}_\nu^B$ nicht aus der Vertauschung von $\mathcal{H}_x$ mit $\Theta(x-y)$.

$$M_3(A^{(1)}A^{(2)}) = M_4(A^{(1)}A^{(2)}) \quad , \tag{48}$$

was auch aus Konsistenzgründen erfüllt sein muß (siehe Absatz 5) . Direkt aus (47) läßt sich ablesen , daß (45) und (45') gleiche Randterme M_4 haben ; die den $\mathcal{B}_v^c$ entsprechenden Glieder sind gleich .

Um in M_4 auf gleichzeitige Limites der interpolierenden $A^{(i)(q)}(x_0)$ -Algebra zu kommen , entwickelt man wie in 2.1 $A(f) = \sum_q \left(f_x^{(q)} A^{(q)}(x_0) + f_x^{*(q)} A^{*(q)}(x_0) \right)$, und erhält unter Beachtung der Spektralbedingung , falls für $f_x^{(q)}$ ebene Wellen eingesetzt werden (Wellenpakete liefern entsprechende Ergebnisse)

$$M_4(A^{(1)}A^{(2)}) = -\left(\lim_{x_0'\to+\infty} - \lim_{x_0''\to-\infty}\right)\Big[\langle p'|A^{(1)*(q')}(x_0')\,A^{(2)(q)}(x_0'')|p\rangle + \frac{1}{2q_0}\langle p'|A^{(1)*(q')}(x_0')\,\dot{A}^{(2)(q)}(x_0'')|p\rangle +$$

$$+ \frac{e^{ix_0'q_0'}}{2q_0'}\langle p'|A^{(1)(-\vec{q}',q_0')}(x_0')\,\dot{A}^{(2)(q)}(x_0'')|p\rangle\Big] \quad . \tag{49}$$

Der y| x-Limes liefert keinen Beitrag

$$\langle p'q'|pq\rangle_{\substack{out\\ in}} - \langle p'q'|pq\rangle_{\substack{out\\ in}} = \left\{\begin{matrix}\lim_{y_0'\to+\infty} & \lim_{x_0'\to+\infty}\\ \lim_{x_0''\to+\infty} & \lim_{y_0''\to+\infty}\end{matrix}\right\} - \langle p'|\int_{-x_0'}^{+x_0'} dx_0 \int d^3x \int_{-y_0'}^{+y_0'} dy_0 \int d^3y\, f_x^* f_y\, H_{T_x}\Theta(x-y)\,A^{(1)}(x)\,j^{(2)}(y)|p\rangle \quad \begin{matrix}+0 & (46c)\\ +M_4(A^{(1)}A^{(2)}) & (46d)\end{matrix} \quad .$$

3. Zur Symmetrisierung der verkürzten Reduktion und zur Einführung von R-T-Produkten erzeugt man wieder durch die Darstellungsbedingung der FOCK-Darstellung verschwindende Ausdrücke . Mit der Ersetzung

$$A^{(2)}(y) \longrightarrow A^{(12)}(y) = A^{(2)}(y)\,F(x_0-y_0) \quad ; \quad F(x_0-y_0) = \left\{\begin{matrix}\Theta(x_0-y_0)\\ -\Theta(x_0-y_0)\end{matrix}\right\} \tag{50}$$

folgt

$$0 = \left.\begin{array}{ll} \lim\limits_{y_0'\to+\infty} & \lim\limits_{x_0'\to+\infty} \\ \lim\limits_{x_0'\to+\infty} & \lim\limits_{y_0'\to+\infty} \end{array}\right\} -\langle p'|\int_{-x_0'}^{+x_0'} dx_0 \int d^3x \int_{-y_0'}^{+y_0'} dy_0 \int d^3y \; f_x^* f_y \, H\!\!\!/_x H\!\!\!/_y \, F(x-y)\, A^{(2)}(y) A^{(1)}(x)|p\rangle \qquad (51a)$$

(51b)

bzw.

$$0 = \left.\begin{array}{ll} \lim\limits_{y_0'\to+\infty} & \lim\limits_{x_0'\to+\infty} \\ \lim\limits_{x_0'\to+\infty} & \lim\limits_{y_0'\to+\infty} \end{array}\right\} -\langle p'|\int_{-x_0'}^{+x_0'} dx_0 \int d^3x \int_{-y_0'}^{+y_0'} dy_0 \int d^3y \; f_x^* f_y \, H\!\!\!/_x \, F(x-y)\, j^{(2)}(y) A^{(1)}(x)|p\rangle \qquad (51c)$$

$$+ M_4(A^{(2)}A^{(1)}) \qquad (51d)$$

4. Mit (46) - (51) gilt für die symmetrische Reduktion

$$\langle p'q'|pq\rangle_{\substack{out\\ in}} - \langle p'q'|pq\rangle_{\substack{out\\ in}} = \left.\begin{array}{ll} \lim\limits_{y_0'\to+\infty} & \lim\limits_{x_0'\to+\infty} \\ \lim\limits_{x_0'\to+\infty} & \lim\limits_{y_0'\to+\infty} \end{array}\right\} -\langle p'|\int_{-x_0'}^{+x_0'} dx_0 \int d^3x \int_{-y_0'}^{+y_0'} dy_0 \int d^3y \; f_x^* f_y \, H\!\!\!/_x H\!\!\!/_y \, \frac{R}{T}(A^{(1)}(x) A^{(2)}(y))|p\rangle \qquad (52a)$$

(52b)

bzw.

$$\langle p'q'|pq\rangle_{\substack{out\\ in}} - \langle p'q'|pq\rangle_{\substack{out\\ in}} = \left.\begin{array}{ll} \lim\limits_{y_0'\to+\infty} & \lim\limits_{x_0'\to+\infty} \\ \lim\limits_{x_0'\to+\infty} & \lim\limits_{y_0'\to+\infty} \end{array}\right\} -\langle p'|\int_{-x_0'}^{+x_0'} dx_0 \int d^3x \int_{-y_0'}^{+y_0'} dy_0 \int d^3y \; f_x^* f_y \, H\!\!\!/_x \, \frac{R}{T}(A^{(1)}(x) j^{(2)}(y))|p\rangle \qquad (52c)$$

$$+ M_4([A^{(1)}A^{(2)}]) \qquad (52d)$$

Das Gesamtergebnis ist etwas anders als in Verfahren B . Der Limes existiert für den Fall , daß $H\!\!\!/_y$ nicht mit Θ vertauscht wird , ohne Zusatzforderungen und unabhängig von der Iteration . Die Limites vor den Integralen können weggelassen werden, und man erhält das Resultat von LSZ als Konsequenz der ASB und unter Beachtung der FOCK-Darstellung. Vertauschung von $H\!\!\!/_y$ mit Θ bedingt Komplikationen und eine wegen (48) bereits in (35) diskutierte Zusatzforderung für den x|y-Limes (nicht y|x-Limes!)

$$M_4([A^{(1)}A^{(2)}]) = 0 \qquad (53)$$

5. Die vertauschten Reduktionsformeln des vorderen C-Verfahrens (46c , d; 52c, d) stimmen wegen (48) bis auf die Integrationsreihenfolgen mit denen des hinteren B-Verfahrens (35a , b) überein . Aussagen über Randterme M_i , die nicht identisch erfüllt sind , lassen sich durch Vergleich verschiedener Reduktionsformeln nicht gewinnen, weil dann allein aus der ASB Wert und Existenz gleichzeitiger Limites folgen würde , was über den Inhalt der ASB hinausgeht und aus ihr nicht folgen darf , wie man durch Gegenbeispiele belegt und aus den Reduktionsformeln selbst nachrechnet .

Mit ähnlicher Argumentation läßt sich zeigen , daß in Ausdrücken des Typs (32a , b) Integrationsreihenfolgen nicht allgemein vertauschbar sind . Nimmt man an , dies wäre erlaubt und z. B. auf (35a) anwendbar, so folgt aus Vergleich mit (46d) für verschiedene Limesreihenfolgen , die so gewählt sein sollen , daß sie mit den Integrationsreihenfolgen übereinstimmen,

$$M_4([A^{(1)}A^{(2)}]) = 0 \quad ,$$

und man hätte mit der Integrationsvertauschung aus der ASB im Gegensatz zur oberen Bemerkung indirekt einen (komplizierten) gleichzeitigen Limes errechnet . Beziehungen des Typs (54) werden sich später als Voraussetzungen der Integrationsvertauschung herausstellen .

6. Für das hintere C-Verfahren notieren wir der Vollständigkeit halber das Ergebnis

$$\langle p'q'|pq\rangle_{\substack{out\\ in}} - \langle p'q'|pq\rangle_{\substack{out\\ in}} = \left.\begin{matrix}\lim\limits_{y_0'\to+\infty}\lim\limits_{x_0'\to+\infty}\\ \lim\limits_{x_0'\to+\infty}\lim\limits_{y_0'\to+\infty}\end{matrix}\right\} -\langle p'|\int_{-y_0'}^{+y_0'}dy_0\int d^3y\int_{-x_0'}^{+x_0'}dx_0\int d^3x\, f_x^* f_y H_{Ty} H_{Tx} \frac{R}{T}(A^{(1)}(x)A^{(2)}(y))|p\rangle \qquad (55a)$$

$$, \qquad (55b)$$

bzw.

$$\langle p'q'|pq\rangle_{\substack{out\\ in}} - \langle p'q'|pq\rangle_{\substack{out\\ in}} = \left.\begin{matrix}\lim\limits_{y_0'\to+\infty}\lim\limits_{x_0'\to+\infty}\\ \lim\limits_{x_0'\to+\infty}\lim\limits_{y_0'\to+\infty}\end{matrix}\right\} -\langle p'|\int_{-y_0'}^{+y_0'}dy_0\int d^3y\int_{-x_0'}^{+x_0'}dx_0\int d^3x\, f_x^* f_y H_{Ty} \frac{R}{T}(j^{(1)}(x)A^{(2)}(y))|p\rangle + M_2([A^{(1)}A^{(2)}]) \qquad (55c)$$

$$+ \quad 0 \qquad (55d)$$

.

7. Einfachere Verfahren zur Ableitung der Reduktionsformeln des Typs $\mathrm{H}_x \mathrm{H}_y \Theta(x-y)$ sind nicht bekannt . Benutzt man nach dem ersten Reduktionsschritt Translationsinvarianz , folgen automatisch die Ergebnisse aus Verfahren B . Das ist konsistent mit dem Resultat , daß wir bei der Ableitung ohne Translationsinvarianz auskamen .

2.4 Zusammenfassung

1. Zur Reduktion der S-Matrix wurden verschiedene nicht äquivalente Verfahren durch Abschneiden des interpolierenden Feldes mit Θ -Funktionen definiert und in Gruppen eingeteilt , je nachdem , welches Feld abgeschnitten wird , welche Differentialoperatoren auf die Θ -Funktion wirken und von welchen Variablen sie abhängt (vordere und hintere Verfahren A, B, C) .

2. Es wurde gezeigt , daß allein aus der schwachen Formulierung der Asymptotenbedingung (1.-7) ohne weitere Annahmen über interpolierende und freie Felder für die einzelnen Abschneideverfahren verkürzte Reduktionsformeln folgen , von denen es drei Typen gab , die sich im wesentlichen durch die relative Stellung der H_x , H_y Operatoren zur Θ -Funktion unterscheiden : Typ I : $\mathrm{H}_\alpha \Theta \mathrm{H}_\beta$, Typ II : $\Theta \mathrm{H}_x \mathrm{H}_y$ +Oberflächenintegral , Typ III : $\mathrm{H}_\alpha \mathrm{H}_\beta \Theta$ ($\alpha, \beta = \{x, y\}$) , und für verschiedene Integrationsreihenfolgen der auftretenden Doppelintegrale gelten ($\iint dx_0 dy_0$ bei vorderen und $\iint dy_0 dx_0$ bei hinteren Verfahren) . Typ III und Typ I für x, y in Reihenfolge der Integrationen entstanden aus Verfahren C , Typ II und Typ I für x, y in entgegengesetzterReihenfolge aus Verfahren B . Die Integrationsreihenfolgen sind nicht vertauschbar . Mit der Darstellungsbedingung der FOCK-Darstellung konnten die verkürzten Formeln im allgemeinen zu R, T-Produkten symmetrisiert werden . In Spezialfällen war dazu auch die Spektralbedingung mit Superauswahlregeln brauchbar . Das symmetrische Verfahren C stimmt im wesentlichen mit dem in [2] angegebenen überein , Verfahren B gibt eine bekannte Umformulierung .

Da nur eine schwache Formulierung der Asymptotenbedingung eingeht , geben die Reduktionsformeln nicht die gesamte Asymptotenbedingung aus Axiom IV wieder . Wie sich das stärkere Axiom IV besser ausnutzen läßt , ist nicht bekannt .

3. Bei der Ableitung war es wesentlich , alle durch partielle Integration oder durch Anwendung des Greenschen Satzes auftretenden Randterme systematisch zu berücksichtigen und einzeln zu diskutieren ; sie hängen stets von der Reihenfolge der iterierten Limites ab , d. h. die mit einer $\ominus$ -Funktion abgeschnittenen Felder erfüllen keine Asymptotenbedingung im Sinne von (1.-7) . Wählt man die Reihenfolge der Limitierung in Übereinstimmung mit der Integrationsreihenfolge der Doppelintegrale , verschwinden die Randterme ; iteriert man umgekehrt , entstehen für Typ I und II gleichzeitige Limites , deren Existenz nicht aus der Asymptotenbedingung folgt , aber eine mit Axiom I-III verträgliche und beweisbare Zusatzforderung ist . Bei allen Rechnungen wurde darauf geachtet , Grenzwertoperationen nicht unbegründet zu vertauschen .

3. Spezielle Konsequenzen der Reduktionsverfahren

Die reduzierte Form der Matrixelemente gibt nach den Ergebnissen in Abschnitt 2 im wesentlichen Eigenschaften der schwachen Formulierung der Asymptotenbedingung wieder und ist ein rechentechnisch vorteilhaftes Verfahren zur Untersuchung der Streumatrix unter Beachtung etwa der Kausalität oder weiterer Eigenschaften des interpolierenden Feldes . Daneben enthält die Reduktion aber auch Strukturaussagen , die zu erwarten sind , da sich die Symmetrieeigenschaften der ASB (Unabhängigkeit der Limites von der Reihenfolge der Iteration) und die bewiesene Unabhängigkeit von gewissen Änderungen des interpolierenden Feldes (Übergang zu abgeschnittenen Feldern) in irgendeiner Form direkt auf die S-Matrixelemente übertragen müssen . Wir werden zeigen , daß durch Vergleich verschiedener Verfahren die Integrationsreihenfolgen in den Reduktionsformeln - unter einer Zusatzforderung - vertauschbar sind , und daß sich aus der ASB oder auch aus der Reduktion Symmetrierelationen gewinnen lassen , wenn man formal die Spektralbedingung aufgibt . Weitere charakteristische Eigenschaften liefern fouriertransformierte Reduktionsformeln (Translationsinvarianz) . Unter Beachtung der DYSON-Darstellung (Kausalität) erhält man ein gekoppeltes unendliches Integralgleichungssystem für die S-Matrix , das unter Näherungsannahmen und einer sinnvollen Einschränkung der Spektralfunktion in übersichtlicher Weise zur CHEW-LOW-Gleichung führt und die Berechnung von relativistischen Korrekturtermen ermöglicht .

3.1 Integrationsreihenfolgen in Reduktionsformeln

1. Die zeitlichen Doppelintegrale $\int dx_0 \int dy_0$ in einigen Reduktionsformeln sind , wie zuerst ZIMMERMANN [17] bemerkte und wie wir im vorigen Abschnitt an einem Beispiel indirekt gezeigt haben , nicht vertauschbar , wenn nur die Asymptotenbedingung vorausgesetzt wird . Unter der zusätzlichen Annahme von Kausalität und Spektralbedingung, sowie einer Regularitätsforderung konnte ZIMMERMANN in einer unveröffentlichten

Arbeit [20][1] für T-Produkte in Reduktionsformeln des C-Verfahrens

$$\iint d^4x\, d^4y\, f_x^* f_y \,\mathrm{H}_x \mathrm{H}_y\, T(A^{(1)}(x) A^{(2)}(y)) = \iint d^4y\, d^4x\, f_x^* f_y \,\mathrm{H}_x \mathrm{H}_y\, T(A^{(1)}(x) A^{(2)}(y)) \qquad (1)$$

als Operatoridentität im Darstellungsraum der A(x) zeigen, d.h. (1) gilt für beliebige Vektoren $A(x_1)\cdots A(x_n)|0\rangle$. In der axiomatischen Theorie ist (1) zur Beschreibung verschiedener Teilchen mit einem interpolierenden Feld nötig [17]. Wir werden Relationen der Form (1) für Verfahren B und C[2] als Operatoridentität in der FOCK-Darstellung, also zwischen beliebigen freien n-Teilchenzuständen $|p\rangle_{frei}$, entsprechend beliebigen $A^{(q_1)}_{frei}\cdots A^{(q_n)}_{frei}|0\rangle$, unter schwächeren Voraussetzungen durch Vergleich verschiedener Reduktionsmethoden herleiten; dabei wird es wesentlich sein, ob die in die Reduktion eingehende Limitierung der Integrale auf beiden Seiten der Identität übereinstimmt (Typ I) oder nicht (Typ II). Um unsere Ergebnisse zu einer Operatoridentität im Sinne von (1) zu machen, bedarf es weiterer Überlegungen. Wir wollen dieses Problem hier nicht angehen; die erhaltenen Resultate reichen zur Lösung der oberen Aufgabe aus.

2. Untersuchen wir zunächst Verfahren B und beachten, daß vordere und hintere Reduktion vertauschte Integrationsreihenfolgen haben. Zur Umformung der noch verschiedenen Integranden vergleichen wir das hintere B Verfahren mit dem vorderen C Verfahren. Wählt man die Limitierung in Übereinstimmung mit der Integrationsreihenfolge, gibt der y| x-Limes (2.-35a geschrieben für R, T-Produkte) mit dem x| y-Limes (2.-52d)

$$\lim_{y_0'\to+\infty}\lim_{x_0'\to+\infty}\langle p'|\int_{-y_0'}^{+y_0'}dy_0\int d^3y\int_{-x_0'}^{+x_0'}dx_0\int d^3x\, f_x^* f_y \,\mathrm{H}_x \overset{R}{T}(A^{(1)}(x) j^{(2)}(y))|p\rangle =$$

$$= \lim_{x_0'\to+\infty}\lim_{y_0'\to+\infty}\langle p'|\int_{-x_0'}^{+x_0'}dx_0\int d^3x\int_{-y_0'}^{+y_0'}dy_0\int d^3y\, f_x^* f_y \,\mathrm{H}_x \overset{R}{T}(A^{(1)}(x) j^{(2)}(y))|p\rangle - M_4([A^{(1)}A^{(2)}]) \qquad (2)$$

---

1) Ich danke Herrn Dr. Zimmermann für eine kurze Einsicht in sein Manuskript.

2) Nach Fertigstellung der Rechnungen erfuhr der Verfasser von einer Arbeit von HILGEVOORD [21], in der für Verfahren C die Vertauschbarkeit der Integrationsreihenfolgen plausibel gemacht wird. Formuliert man den dort angegebenen - nicht korrekten- Gedanken streng, führt er im wesentlichen auf die für Verfahren C benutzte Methode.

einen Vertauschbarkeitssatz des Typs II

$$\lim_{y_0'\to+\infty}\lim_{x_0'\to+\infty}\langle p'|\int_{-y_0'}^{+y_0'}dy_0\int d^3y\int_{-x_0'}^{+x_0'}dx_0\int d^3x\, f_x^* f_y\, \mathrm{H}_x \frac{R}{T}(A^{(1)}(x)j^{(2)}(y))|p\rangle = \lim_{x_0'\to+\infty}\lim_{y_0'\to+\infty}\langle p'|\int_{-x_0'}^{+x_0'}dx_0\int d^3x\int_{-y_0'}^{+y_0'}dy_0\int d^3y\, f_x^* f_y\, \mathrm{H}_x \frac{R}{T}(A^{(1)}(x)j^{(2)}(y))|p\rangle, \quad (2')$$

falls die Relation (hinreichend)

$$M_4([A^{(1)}A^{(2)}]) = 0 \quad , \quad (3)$$

d.h. nach (2.-49) unter Verwendung der Spektralbedingung

$$0 = (\lim_{x_0'\to+\infty} - \lim_{x_0'\to-\infty})\Big[\langle p'|[A^{(1)*(q')}(x_0')\,A^{(2)(q)}(x_0')]|p\rangle + \frac{1}{2q_0'}\langle p'|[A^{(1)*(q')}(x_0')\,\dot{A}^{(2)(q)}(x_0')]|p\rangle +$$

$$+ \frac{e^{ix_0'q_0'}}{2q_0'}\langle p'|[A^{(1)*(-\vec{q}',q_0')}(x_0')\,\dot{A}^{(2)(q)}(x_0')]|p\rangle\Big] \quad , \quad (3')$$

erfüllt wird . Im $x|y$ bzw. $y|x$-Limes für die rechte bzw. linke Seite von (2) folgt statt (3) nach (2.-35b) bzw. (2-52c) wegen (2.-48) die gleiche Bedingung , so daß (3) für Vertauschungen des Typs II ausreicht . Man hätte dieses Ergebnis nicht so leicht allein durch Betrachtung des B-Verfahrens bekommen . Vertauschungen des Typs I , in denen die Limesreihenfolge für beide Integrale gleich ist , folgen ohne Zusatzvoraussetzungen . In (2.-35c) und (2.-52c) treten keine Randterme auf , die Integrationen sind also von vornherein vertauschbar , und in (2.-35b) und (2.-52d) heben sie sich wegen (2.-48) weg .

$$\lim_{\substack{y_0'\to+\infty\\ x_0'\to+\infty}}\lim_{x_0'\to+\infty}\langle p'|\int_{-y_0'}^{+y_0'}dy_0\int d^3y\int_{-x_0'}^{+x_0'}dx_0\int d^3x\, f_x^* f_y\, \mathrm{H}_x \frac{R}{T}(A^{(1)}(x)j^{(2)}(y))|p\rangle = \lim_{\substack{y_0'\to+\infty\\ x_0'\to+\infty}}\lim_{x_0'\to+\infty}\langle p'|\int_{-x_0'}^{+x_0'}dx_0\int d^3x\int_{-y_0'}^{+y_0'}dy_0\int d^3y\, f_x^* f_y\, \mathrm{H}_x \frac{R}{T}(A^{(1)}(x)j^{(2)}(y))|p\rangle . \quad (4)$$

Bedingung (3) haben wir schon ausführlich in 1.32 und bei den Reduktionsverfahren diskutiert. In translationsinvarianten Theorien ist sie , vereinbar mit relativistischer Invarianz und Kausalität , stets erfüllt . Sie ist identisch mit einer Forderung , die unkomplizierte Reduktionsverfahren möglich macht , also Verfahren ohne Randterme und ohne vorgeschriebene Limesreihenfolgen .

Die Relationen (2-4) lassen sich sofort auf Matrixelemente zwischen beliebigen freien n-Teilchenzuständen verallgemeinern . Für die verkürzten Reduktionsformeln ist das trivial ; in die symmetrischen ging beim Subtraktionsverfahren (2.-27) die Bedingung $\langle p'| A^{(2)(q_1)}_{frei}\, A^{(1)*(q')}_{frei} |p\rangle \neq 0$ ein , die den Beweis zunächst auf Matrixelemente dieses Typs beschränkt; man zeigt aber leicht , daß die Integrationsvertauschung auch ohne FOCK-Darstellung folgt , indem man die nicht verschwindenden Symmetrisierungsterme bei der Ableitung gesondert diskutiert .

4. Für Verfahren C ist der Beweis trivial . Man vergleicht (2.-52a , b) mit (2.-55a , b) und findet für alle Limeskombinationen

$$\langle p'| \iint d^4x\, d^4y\, f^*_{x'} f_y \overleftrightarrow{K}_{x'} \overleftrightarrow{K}_y \overset{R}{T}(A^{(1)}(x) A^{(2)}(y)) |p\rangle = -\langle p'| \iint d^4y\, d^4x\, f^*_{x'} f_y \overleftrightarrow{K}_y \overleftrightarrow{K}_{x'} \overset{R}{T}(A^{(1)}(x) A^{(2)}(y)) |p\rangle \,, \qquad (5)$$

wobei nur eine unwesentliche Regularitätsforderung beim Weglassen der Randterme eingeht[1] .

Insgesamt haben wir gezeigt , daß in Theorien mit schwacher ASB und Axiom I-III oder in Theorien mit schwacher ASB im Verfahren C bzw. im unkomplizierten Verfahren B die Vertauschung der Integrationen für Matrixelemente zwischen freien n-Teilchenzuständen erlaubt ist .

3.2 Symmetrierelationen

1. Die symmetrische Formulierung der schwachen Asymptotenbedingung läßt sich zur Ableitung von Relationen benutzen , die (bei Einführung ladungskonjugierter Felder) Matrixelemente verschiedener Prozesse , sowie physikalische und unphysikalische Bereiche gleicher Prozesse miteinander verbinden und bei Umformulierungen der Theorie als tief liegende Konsistenzbedingungen sehr wesentlich sind . Fordert man z. B. in einer Impulsraumaxiomatik für die Streuamplitude bestimmte analytische Eigenschaften (Integraldarstellungen , doppelte Dispersionsrelationen [22]) , so müssen diese , wenn sie mit I-IV verträglich sein sollen ,

---

1) Aus (5) lassen sich prinzipiell auch (2-4) gewinnen , wenn links und rechts jeweils ein $\overleftrightarrow{K}$ in das R-T-Produkt hineingezogen wird . Die entstehenden Randterme fallen wegen der Unsymmetrie der Integrationen nicht fort .

mindestens mit den Symmetrierelationen vereinbar angesetzt werden . Eine Verletzung der Symmetrie entspricht einer Verletzung der ASB und führt in unübersichtlicher Weise [23] zu einer prinzipiellen Strukturänderung .

2 Skizzieren wir das Verfahren am Beispiel der Streuung skalarer Teilchen durch Analyse der reduzierten Matrixelemente und untersuchen im Impulsraum den Teil des unphysikalischen Gebietes , der negativen Energien entspricht . Um Matrixelemente in diesem Teil zu gewinnen , gibt es mehrere (in ihren Konsequenzen gleiche) Methoden . Am einfachsten definiert man , daß im Grenzfall ebener Wellen in $f^{*(q)}_x$, $f^{(q)}_x$ die explizit vorkommenden Impulse (q) formal durch $(-q)$ zu ersetzen sind[1] . Um das damit verbundene darstellungstheoretische Problem zu umgehen[2] , setzt man bei der Ableitung der symmetrischen Reduktionsformeln nicht mehr die bequeme FOCK-Darstellung voraus , sondern benutzt neben der Asymptotenbedingung nur die Definition der physikalischen Ein- und Zweiteilchenzustände , also ein darstellungsunabhängiges Verfahren . Die Verallgemeinerung der Reduktionsformeln auf diesen Fall ist leicht ; die nicht ausreduzierten und durch die Asymptotenbedingung ausgedrückten Symmetrisierungsterme (2.-27) müssen auf der jeweils rechten Seite der Formeln abgezogen werden . Dadurch lassen sich die charakteristischen Doppelintegrale nicht mehr wie bisher mit der Konstruktionsvorschrift für n-Teilchenzustände auf S-Matrixelemente im physikalischen Bereich zurückführen ; es treten stets auch unphysikalische Bereiche auf[3] .

---

1) Das ist nicht unbedingt eine Definition durch analytische Fortsetzung . Es könnte sein , daß man von der positiven reellen q_o-Achse nicht analytisch auf die negativ reelle Achse kommt $(q_o>0\,,\ m\neq 0)$.

2) Es treten inäquivalente Darstellungen auf , deren Berücksichtigung die Ableitung kompliziert .

3) Siehe S. 27 . Die Definition unphysikalischer Matrixelemente ersetzt in gewisser Weise die Darstellungsbedingung der FOCK-Darstellung und erlaubt eine Symmetrisierung , wobei allerdings als Preis ein unphysikalischer Bereich auftritt .

3. Ausgangspunkt der folgenden Ableitung ist die Gleichheit der vorderen und hinteren Reduktion für R-T-Produkte , die aus der symmetrischen Formulierung der Asymptotenbedingung in der FOCK-Darstellung folgte , sich aber auf das obere Verfahren sofort übertragen läßt , da die abzuziehenden Symmetrisierungsterme dieselben sind . Also liefern (2.-32b) und (2.-35a , auf R-Produkte erweitert , x mit y vertauscht) im Spezialfall $A^{(1)}(x) = A^{(2)}(x) = A(x)$ (Integrale im x|y-Limes)

$$\langle p'| \iint dx^4 dy^4 f_x^{*(q')} f_y^{(q)} H_y \Theta(x-y) H_x [A(x) A(y)] |p\rangle = \langle p'| \iint dx^4 dy^4 f_y^{*(q')} f_x^{(q)} H_y \Theta(y-x) H_x [A(x) A(y)] |p\rangle \quad . \tag{6}$$

Um beide Integranden in eine passende Form zu bringen[1] , benutzt man auf der rechten Seite $\Theta(y-x) = 1 - \Theta(x-y)$, führt das aus der 1 entstehende Integral J

$$J = \langle p'| \iint dx^4 dy^4 f_y^{*(q')} f_x^{(q)} [j(x) j(y)] |p\rangle \tag{7}$$

mit (2.-32b ,. 38) auf S-Matrixelemente , teils im physikalischen , teils im unphysikalischen Bereich zurück . Für das Integral mit $\Theta(x-y)$ gelingt dies nach (2.-32b) mit $f_y^{*(q')} f_x^{(q)} = f_x^{*(-q)} f_y^{(-q')}$ und für die linke Seite von (6) direkt ; die Symmetrisierungsterme heben sich wieder fort . Damit folgt aus der Asymptotenbedingung und der Definition des unphysikalischen Bereiches für $A^{(1)}(x) = A^{(2)}(x)$ und skalare Teilchen eine Symmetrierelation

$$\langle p', -q | p, -q' \rangle_{\text{out}} - \langle p', -q | p, -q' \rangle_{\text{in}} = \langle p', q' | p, q \rangle_{\text{in}} - \langle p', q' | p, q \rangle_{\text{out}} \quad , \quad (q^2 = q'^2) \quad , \tag{8}$$

die mit der bekannten Crossing Symmetrie zusammenhängt[2] . T-Produkte geben etwas einfacher aus

$$\langle p'| \iint dx^4 dy^4 f_x^{*(q')} f_y^{(q)} H_y T(j(x) A(y)) |p\rangle = \langle p'| \iint dx^4 dy^4 f_y^{*(q')} f_x^{(q)} H_y T(A(y) j(x)) |p\rangle \tag{9}$$

eine analoge Relation

$$\langle p', -q | p, -q' \rangle_{\text{out}} - \langle p', -q | p, -q' \rangle_{\text{in}} = \langle p', q' | p, q \rangle_{\text{out}} - \langle p', q' | p, q \rangle_{\text{in}} \quad , \quad (q^2 = q'^2) \tag{8'}$$

zwischen Matrixelementen aus physikalischen und unphysikalischen Bereichen .

---

1) Eine ähnliche Ableitung , die aber Translationsinvarianz voraussetzt , ist in [24] angedeutet .

2) Auf den physikalischen Hintergrund dieser Relationen und auf den Zusammenhang der unphysikalischen Matrixelemente mit Prozessen zwischen ladungskonjugierten Teilchen wollen wir in diesen mehr formalen Betrachtungen nicht eingehen , Verallgemeinerungen der Methode auf Teilchen mit Spin (z. B. auf die Substitutionsregeln der Störungstheorie) sind offensichtlich .

3.3 Gleichungen vom LOW-Typ

1. Nach den Betrachtungen aus Abschnitt 2. muß zur Konkretisierung der Theorie in den Reduktionsformeln Axiom I-III , sowie die ASB für mehr als zwei Operatoren (höhere Reduktionen) ausgewertet werden , zusammen mit physikalisch plausiblen zusätzlichen Forderungen und eventuellen Näherungsannahmen . Arbeiten in dieser Richtung führen zu exakten [18] und verallgemeinerten [22] Dispersionsrelationen und zu exakten [4] gekoppelten Integralgleichungssystemen für R, T-Funktionen, die , auf die S-Matrix übertragen , bedingt sinnvolle Näherungen erlauben . Zu einem weiteren inhomogenen Integralgleichungssystem , Gleichungen vom LOW-Typ , kommt man mit den Reduktionsformeln des Verfahrens B unter Beachtung der (zeitlichen) Translationsinvarianz und Kausalität .

2. Um die einfache Ableitung kurz zu skizzieren , gehen wir von (Integrale im x| y-Limes)

$$\underset{out}{\langle p'q'|pq\rangle} - \underset{in}{\langle p'q'|pq\rangle} = \underbrace{-\langle p'|\iint d^4x\,d^4y\, f_x^*\,\delta(x_0-y_0)\,[j^{(1)}(x)\overset{\leftrightarrow}{\partial_0}A^{(2)}(y)]\,f_y|p\rangle}_{=T_1(p'q';pq)} \underbrace{-\langle p'|\iint d^4x\,d^4y\, f_x^*\,f_y\,\frac{R}{T}\,(j^{(1)}(x)\,j^{(2)}(y))\,|p\rangle}_{=T_2(p'q';pq)} \tag{9}$$

aus und beachten in beiden Termen die Translationsinvarianz durch Einschieben eines vollständigen Zwischenzustandssystems $\sum_z |z\rangle\langle z|$ in das Operatorprodukt . Wegen der Θ -Funktion gibt die zeitliche Translationsinvarianz in T_2 eine typische Nennerstruktur , während die räumliche Translationsinvarianz eine (unwesentliche) Beschränkung der Zwischenzustandssumme auf Impulse $\vec{p}_z = \vec{p}' + \vec{q}$ bzw. $\vec{p}_z = \vec{p}' - \vec{q}$ bewirkt und im Folgenden auch weggelassen werden kann (f_x^*, f_y ebene Wellen , von deren Normierung die uninteressante Konstante abhängt)

$$T_2(p'q';pq) = \text{const.}\left[\sum_{\substack{z\\ \vec{p}_z=\vec{p}'+\vec{q}}} \frac{\langle p'|j^{(1)}(0)|z\rangle\langle z|j^{(2)}(0)|p\rangle}{\omega_p+\omega_q-\omega_z+i\varepsilon} + \sum_{\substack{z\\ \vec{p}_z=\vec{p}'-\vec{q}}} \frac{\langle p'|j^{(2)}(0)|z\rangle\langle z|j^{(1)}(0)|p\rangle}{\omega_{p'}-\omega_q-\omega_z\mp i\varepsilon}\right] \tag{10}$$

Die verschiedenen Vorzeichen $\pm i\varepsilon$ im zweiten Summanden gelten für das R, T-Produkt . Da beide verwendbar sind , ist es gleich , ob man den Pol in die obere oder untere ω_z -Halbebene legt , oder auf welchem Ufer des Schnittes man das Integral nimmt . Für den ersten Summanden gilt

das nicht[1] , er hat einen echten Schnitt, und man überlegt leicht , daß er der entscheidende ist .

Um T_1 in eine ähnliche Form wie (10) zu bringen , ist die gesamte Translationsinvarianz nötig , die außer beim Zurückschieben der Operatoren auf Null über die zur Umformung der $A^{(2)}(t)$, $\dot{A}^{(2)}(t)$ in $j^{(2)}(x)$ nötigen nach $A^{(2)}(t)$, $\dot{A}^{(2)}(t)$ aufgelösten Relation $\partial_t A(t) = i[A(t), P_4]$ usw. eingeht ; die Matrixelemente und die Konstante sind bis auf Vorzeichen dieselben wie in T_2 , die Energienenner dagegen etwas verschieden . Wesentliche Ergebnisse folgen mit (10) aus dieser Form nicht[2].

3. Interessanter ist eine Möglichkeit, die stärkere Voraussetzungen braucht . Da in T_1 gleichzeitige Kommutatoren auftreten , kann man die Methode aus Abschnitt 1.32 verwenden und die Integrale auf Spektralfunktionen zurückführen . Die DYSON-Darstellung (1.-17) liefert nach Auswertung der elementaren Integrale

$$T_1(p'q';pq) = \text{const}\,\delta^{(4)}(p'+q'-p-q)\cdot P_1(p'q';pq) ,$$

$$P_1(p'q';pq) = c_1\left(\omega_q(\omega_p-\omega_{p'}) - \tfrac{1}{4}(\omega_p-\omega_{p'})^2 - \mu^2\right) - \dot{c}_2'\left((\omega_p-\omega_{p'})+2\omega_q\right) - 3c_3 + c_4 ,$$

$$c_1 = \int_0^\infty d\varkappa^2\, \tilde{\varphi}_{1,2;p',p}(x-y,\varkappa^2)\Big|_{x=y} , \qquad c_2 = \int_0^\infty d\varkappa^2\, \dot{\tilde{\varphi}}_{1,2;p',p}(x-y,\varkappa^2)\Big|_{x=y} , \quad c_2' = i c_2 , \tag{11}$$

$$c_3 = \int_0^\infty d\varkappa^2\, \ddot{\tilde{\varphi}}_{1,2;p',p}(x-y,\varkappa^2)\Big|_{x=y} , \qquad c_4 = \int_0^\infty d\varkappa^2\,\varkappa^2\, \tilde{\varphi}_{1,2;p',p}(x-y,\varkappa^2)\Big|_{x=y} .$$

---

1) Der zweite Summand stammt aus dem im Ortsraum verschwindenden und nur zur Symmetrisierung hinzugefügten Glied und tritt in den verkürzten Verfahren , die zur Ableitung von Integralgleichungen zweckmäßiger sind , trivialer Weise nicht auf . Bedeutung erlangt er bei der Auswertung von Symmetrierelationen und Unitarität . Zur Diskussion im Impulsraum addiert man beide Formulierungen von (10) .

2) Untersuchungen im Zusammenhang mit der Unitarität zeigen , in welcher Weise sich die relevanten Terme aus T_1 und T_2 zusammenfassen lassen .

P_1 ist ein Polynom 2. Grades in $\omega_p, \omega_{p'}, \dots$ mit Koeffizienten c_i, welche durch die Spektralfunktion des Kommutators vollkommen bestimmt sind und indirekt von p', p abhängen. Man kann zeigen, daß für Bosonen im BREIT-System $\Im m\, T_1 = 0$ gilt, was zur Diskussion von Subtraktionstermen bei der Ableitung von Dispersionsrelationen einige Bedeutung hat. Für Spinorfelder ist die Ableitung eines Analogons zu (11) umständlich[1].

4. Mit (10) und (11) folgt

$$\underset{out}{\langle p'q'|pq\rangle} - \underset{in}{\langle p'q'|pq\rangle} = T_1(p'q';pq) + \text{const}\left[\sum_{\vec{p}_2=\vec{p}'+\vec{q}} \frac{\langle p'|j^{(\mu)}(0)|z\rangle\langle z|j^{(\mu)}(0)|p\rangle}{\omega_p+\omega_q-\omega_z+i\varepsilon} + \sum_{\vec{p}_2=\vec{p}'-\vec{q}} \frac{\langle p'|j^{(\mu)}(0)|z\rangle\langle z|j^{(\mu)}(0)|p\rangle}{\omega_{p'}-\omega_q-\omega_z\mp i\varepsilon}\right], \qquad (12)$$

in der im "inhomogenen" Polynomterm Kausalität und Invarianz, in den restlichen Summen nur die Translationsinvarianz beachtet ist. Weil nach (2.-4) die $\langle p'|j^{(\mu)}(0)|z\rangle$ ebenfalls T-Matrixelemente sind, enthält (12) ein gekoppeltes Integralgleichungssystem für T, wenn für die Matrixelemente höherer Prozesse (Mehrteilchenzustände) in $\sum_z$ entsprechende Beziehungen hergeleitet werden.

Als Näherung für das Integralgleichungssystem ist es im niederenergetischen Bereich sinnvoll, in $\sum_z$ nur die untersten Zwischenzustände zu berücksichtigen, wodurch sich das System entkoppelt und im Idealfall zu einer singulären, nicht eindeutig lösbaren Integralgleichung für T entartet [25], (Ein-Meson-Näherung). Unabhängig davon wird es für $m_p \gg m_q$ erlaubt sein, das schwerere Teilchen (p-Teilchen) als ruhend anzunehmen[2]; dann fällt die Abhängigkeit von p', p in (12) fort, der zweite Summand in T_2 verliert seinen Pol, und es folgt eine Gleichung für T, die mit der statischen CHEW-LOW-Gleichung übereinstimmt, wenn $P_1 \equiv 0$ ist[3]. Man erhält also unter den Voraussetzungen

1. ruhendes p-Teilchen
2. $P_1 = 0$ (13)

---

1) Herrn W. SANDHAS danke ich in diesem Zusammenhang für wertvolle Hinweise.

2) Ein quantenmechanisches Modell, in dem das p-Teilchen als Impulsabsorber wirkt, ist in [8] durchgeführt.

3) Ein Hinweis auf diesen Zusammenhang findet sich in [26].

aus den Axiomen I-IV die CHEW-LOW-Gleichung als recht universelle Eigenschaft einer axiomatischen Theorie. Voraussetzung 2 bedeutet für das allgemeine Schema eine aus (11) ablesbare Einschränkung der Spektralfunktion des Kommutators , welche sich für wechselwirkende Felder erfüllen läßt . Die Existenz kanonischer Felder , die die Theorie nach [12] auf den trivialen Fall beschränken würde , ist für (13) nicht notwendig .

Die obere Methode hat den Vorteil , daß sie Verbesserungen der CHEW-LOW-Gleichung möglich macht , ohne daß die von CHEW und LOW angegebenen eleganten Lösungsmethoden versagen . Die Inhomogenität läßt sich durch eine Art Subtraktionsterm berücksichtigen und führt zu einer konsequenten niederenergetischen Näherung , welche die bekannten , durch Dispersionsverfahren abgeleiteten relativistischen Korrekturen [27], enthalten sollte . Rechnungen zu diesem Problem sind im Gange .

5. Neben Näherungsverfahren lassen sich aus (12) bzw. (9) allgemeine Eigenschaften der Theorie entweder beweisen oder plausibel machen . Z. B. kann man der zunächst willkürlichen und formalen Zerlegung von S in zwei Summanden T_1 und T_2 im Zusammenhang mit (13) eine aus der Axiomatik nicht direkt ableitbare Deutung geben . Die relative Größe von T_1 und T_2 sollte mit der Stärke der Wechselwirkung zusammenhängen : Für schwache und elektromagnetische Wechselwirkungen überwiegt bei nicht zu hohen Energien T_1 , während für starke Wechselwirkungen T_2 dominant ist . Begründen läßt sich diese Dominanzregel , abgesehen von störungstheoretischen Argumenten , heuristisch aus dem Erfolg der CHEW-LOW-Theorie für starke Wechselwirkungen ($T_1 = 0$) und der Bemerkung von DRELL und ZACHARIASEN [28], daß die elektromagnetische Elektron-Nukleon Streuung näherungsweise (Ein-Photon-Austausch bzw. Formfaktor) durch T_1 wiedergegeben wird , ($T_2 = 0$) .

6. Als exakte Strukturaussage liefert das inhomogene Glied T_1 bzw. P_1 einen Zusammenhang zwischen der hier benutzten Kausalität (Lokalität) aus Axiom III und der von BOGOLJUBOV eingeführten . Beide Kausalitätsdefinitionen stimmen nicht überein [16], [21], doch ist ein

direkter Vergleich schwer oder garnicht möglich , da der tiefere exakte Zusammenhang zwischen dem von BOGOLJUBOV und von LSZ benutzten Axiomensystemen weitgehend ungeklärt ist . Sinnvoll wird nur ein Vergleich der Ergebnisse beider Verfahren . Dispersionsrelationen geben für die Streuung zwischen Bosonen und Fermionen keinen Unterschied , man erhielt in beiden Fällen gleiche Analytizitätsaussagen . Die verallgemeinerten LOW-Gleichungen dagegen sind verschieden . Aus den BOGOLJUBOV'schen Axiomen folgt mit (zeitlicher) Translationsinvarianz und Kausalität genau Beziehung (12) , wobei P fehlt [29]. Die BOGOLJUBOV-Kausalität enthält also mehr als Axiom III : Sie impliziert $P_1 \equiv 0$, was eine mögliche Spezialisierung der Spektralfunktion ist . Damit wird auch verständlich , weshalb beide Kausalitätsdefinitionen zu gleichen Gültigkeitsbereichen für Dispersionsrelationen (π-N -Streuung) führen ; wegen $\lambda_{III} P_1 = 0$ stört P den benötigten Analytizitätsbereich nicht; eine nähere Inspektion der Ableitung in [18] zeigt , daß P nur in die Subtraktionsterme eingeht und sonst weggelassen werden kann .

Literaturverzeichnis

[1] W. HEISENBERG , Z. Physik 120 , 513 (1943)

[2] H. LEHMANN , K. SYMANZIK , W. ZIMMERMANN
Nuovo Cimento (10) , 1 , 205 (1955) ; 6 , 319 (1957)

[3] G. BERENDT , H.D. DOEBNER , preprint

[4] V. GLASER , H. LEHMANN , W. ZIMMERMANN ,
Nuovo Cimento (10) , 6 , 1122 (1957)

[5] A.S. WIGHTMAN , Phys, Rev. 101 , 860 (1956)

[6] J.S. LEW , Dissertation Princeton (1960)

[7] siehe z.B. H.J. BORCHERS , Oberwolfach , Oktober 1959

[8] G. BERENDT , Dissertation , Berlin (1961)

[9] R. JOST , H. LEHMANN , Nuovo Cimento (10) , 5 , 1598 (1957)
F.J. DYSON , Phys. Rev. 110 , 1460 (1958)

[10] H. LEHMANN , Nuovo Cimento (10) , 11 , 342 (1954)

[11] R. JOST , Int. Spring School of Phys. , Naples , April (1959)

[12] R. HAAG , Kgl. Danske Videnskab. Selskab , Mat.-fys.-Medd.
29 , No. 12 (1955)

[13] H.J. BORCHERS , Nuovo Cimento (10) , 15 , 784 (1960)
H. ARAKI , R. HAAG , B. SCHROER , Nuovo Cimento (10) , 19
90 (1961)

[14] R. HAAG , Phys. Rev. 112 , 669 (1958)

[15] R.F. STREATER , Proc. Roy. Soc. A 256 , 39 (1960)

[16] F. KASCHLUHN , Nuovo Cimento (10) , 12 , 541 (1959)

[17] W. ZIMMERMANN , Nuovo Cimento (10) , 10 , 597 (1958)

[18] H. LEHMANN , Nuovo Cimento Suppl. , 14 , 153 (1959)

[19] siehe z.B. J. HAMILTON , The Theory of Elementary Particles ,
Oxford (1959) S. 326

[20] W. ZIMMERMANN , Order of Integrations in Reduction Formulae ,
unveröffentlichtes Manuskript

[21] J. HILGEVOORD , Nuclear Phys. 15 , 657 (1960)

[22] S. MANDELSTAM , Phys. Rev. 112 , 1344 (1958)

[23] F. ZACHARIASEN , Phys. Rev. 121 , 1851 (1960)

[24] siehe z. B. J. HAMILTON , l. c. S. 328

[25] G. F. CHEW , F. E. LOW , Phys. Rev. , 101 , 1570 (1956) , weitere Literatur bei H. JAHN , Fortschr. d. Phys. , 8 , 451 (1959)

[26] R. HAAG , Nuovo Cimento (10) , 5 , 203 (1957)

[27] G. F. CHEW , F. E. LOW , M. L. GOLDBERGER , Y. NAMBU , Phys. Rev. , 106 , 1337 (1957)

[28] S. D. DRELL , F. ZACHARIASEN , Electromagnetic Structure of Nucleons , London(1961)

[29] R. OMNES , Nuovo Cimento (10) , 10 , 983 , (1957)

[30] N. N. BOGOLJUBOV , D. V. SHIRKOV , Introduction to the Theory of Quantized Fields , New York (1959)

[31] G. F. DELL'ANTONIO , P. GULMANELLI , Nuovo Cimento (10) 7 , 38 , (1959)
H. ARAKI , Ann. of Phys. , 11 , 260 , (1960)

Lebenslauf
des
Heinz-Dietrich Doebner , geboren am 11.5.1931 in
Berlin-Wilmersdorf

Eltern : Apotheker Heinrich Doebner und Margarete Doebner ,
geb. Weber .

Schulen : Volksschule und Askanisches Gymnasium in Berlin-Tempelhof,
Städt. Oberschule in Wittenberge ,
Freiherr vom Stein Oberschule in Berlin-Spandau
(dort Abitur 11.6.49)

Studium: Vom WS 50/51 - WS 55/56 an der Freien Universität Berlin
(Vordiplom am 11.3.53 , Diplom am 11.2.57 , Staatsexamen
am 27.4.57) bei den Professoren G. LUDWIG , M. PÄSLER ,
H. LASSEN , R. HONERJÄGER , C. RAMSAUER ,
A. DINGHAS , H.H. OSTMANN , F.W. LEVI , R. LORENZ ,
W. LAUTSCH , K. ÜBERREITER , W. WEISCHEDEL ,
E. MAY , H.J. LIEBER .

Tätigkeiten: An der Bundesanstalt für Materialprüfung (Materialprüfungsamt) Berlin-Dahlem von 1949 - 1957 zuerst als Hospitant später als wissenschaftlicher Mitarbeiter (Untersuchungen über Detonations- und Impulsfortpflanzung in Gasen) .

Am Institut für Theoretische Physik der Freien Universität Berlin von 1957 - 1958 als Stipendiat der Deutschen Forschungsgemeinschaft und ab 1.11.58 als wissenschaftlicher Assistent (ab 1.8.1960 beamtet) .